



## Modelowanie efektu grawitacyjnego generowanego przez pustki poeksploatacyjne o zmiennych parametrach

### Modelling of the gravitational effect generated by post-exploitation voids with variable parameters

Dr inż. Łukasz Kortas<sup>\*)</sup>

**Treść:** Metoda grawimetryczna jest jednym z najefektywniejszych sposobów nieinwazyjnej identyfikacji występowania pustek pogórnictwowych. Istotą tej metody jest pomiar rozkładu natężenia siły ciężkości, którego anomalie wskazują miejsca występowania pustek. W tej pracy podjęto próbę wyznaczenia w trybie badań modelowych prostych związków funkcyjnych, pomiędzy parametrami fizycznymi i geometrycznymi pustki a spodziewanym efektem grawitacyjnym identyfikowanym przez pomiary grawimetryczne, w formie anomalii. Wyniki modelowań stanowiły podstawę do sporządzenia odpowiednich wykresów w formie funkcji dyskretnej, które następnie aproksymowano w celu znalezienia relacji pomiędzy badaną zmienną a efektem grawitacyjnym. Formuły te aproksymują tylko ściśle funkcje i dotyczą pustek o niewielkich wymiarach i znajdujących się na małych głębokościach (nie przekraczających znacząco 50 m). Otrzymane rozwiązanie stanowić może podstawę weryfikacji tradycyjnie przeprowadzonej interpretacji wyników pomiarów grawimetrycznych, a następnie wykonania badania rozkładu obiektów zaburzających na drodze analizy odwrotnej.

**Abstract:** The gravimetric method is one of the most efficient methods of non-invasive identification of post-mining voids occurrence. The essence of this method is the measurement of distribution of the force of gravity intensity, the anomalies of which indicate the sites of voids occurrence. In the present work an attempt was undertaken to determine in the course of model investigations the simple functional connections between the physical and geometrical parameters of the void and the expected gravitational effect identified by gravimetric measurements in the form of anomalies. The modelling results constituted the basis to draw up suitable graphs in the form of discrete functions, which were next approximated in order to find relations between the investigated variable and the gravitational effect. These formulas approximate only strict functions and concern voids with small dimensions and occurring at low depths (not exceeding 50 m). The obtained solution can constitute the basis for the verification of traditionally performed interpretation of results of gravimetric measurements and next carrying out of investigation of the distribution of disturbing objects by means of the reverse analysis.

#### Słowa kluczowe:

grawimetria, modelowanie, pustki, związki funkcyjne

#### Key words:

gravimetry, modelling, voids, functional connections

## 1. Wprowadzenie

Jednym z ważniejszych problemów geofizyki w Górnośląskim Zagłębiu Węglowym jest niewystarczająca dokładność lokalizacji pustek pochodzenia poeksploatacyjnego. Wiodącym sposobem identyfikacji ich położenia w utworach podpowierzchniowych jest metoda mikrogravimetryczna. Istotą tej metody jest pomiar rozkładu natężenia siły ciężkości, którego anomalie wskazują miejsca występowania niejednorodności w rozkładzie mas w podłożu, w tym w szczególności pustek. Interpretacja wyników pomiarów grawimetrycznych jest na ogół trudna ze względu na współuczestniczenie wielu czynników w zmierzonym efekcie grawitacyjnym. Ten sam rozkład anomalii może pochodzić od obiektów różniących się rozmiarami i położeniem przestrzennym, dlatego analiza danych i interpretacja wyników prowadzi niekiedy do

niejednoznacznych wniosków. Zagadnienie to może być obecnie przedmiotem badań modelowych. Spodziewanym w przyszłości rozwiązaniem tego problemu mogłoby być sformułowanie algorytmu komputerowej interpretacji obserwowanych efektów grawitacyjnych.

Prezentuje się tutaj pewien element tego zagadnienia, jakim jest wyznaczenie w trybie badań modelowych uproszczonych związków funkcyjnych, opisujących zależność efektu grawitacyjnego od warunków fizycznych górotworu oraz wymiarów i położenia pustki. Związki funkcyjne przedstawione są w postaci graficznej oraz wyrażone odpowiednimi formułami matematycznymi. Rozwiązania te stanowią podstawę dla zadania odwrotnego, czyli przybliżonego ilościowego określenia warunków obecności pustek na podstawie zmierzzonego rozkładu anomalii siły ciężkości.

Zagadnienia rozpatrywane dalej wiążą się z problematyką interpretacji ilościowej anomalii siły ciężkości wywołanych przez ciała zaburzające tu: pustki pogórnictwowe, których gęstość

<sup>\*)</sup> Główny Instytut Górnictwa, Katowice

znacznie różni się od gęstości utworów je otaczających. Interpretacja ilościowa [3] polega na wyznaczeniu, w powiązaniu z budową geologiczną ośrodka, parametrów tych ciał, takich jak: kształt, gęstość, głębokość występowania itp. Gdy parametry ciał zaburzających są znane lub jak badaniach modelowych – z góry założone, stosuje się pośrednie metody interpretacji ilościowej polegające na obliczaniu rozkładu grawitacyjnego przyciągania ciał zaburzających, tj. składowej pionowej siły newtonowskiego przyciągania  $\Delta g$ . Jest to tak zwane zadanie proste, w którym zadane są wymiary ciała, jego gęstość i głębokość występowania. Polega ono na prowadzeniu obliczeń analitycznych dla wyznaczenia pól grawitacyjnych od ciał zaburzających o znanej geometrii. Modelem ciała zaburzającego jest bryła o regularnej budowie geometrycznej lub suma takich brył, gdy odtwarzana forma geologiczna lub antropogeniczna ma złożoną budowę geometryczną. Ciała zaburzające, jak walec pionowy i jego szczególny przypadek – dysk i prostopadłościan – są bryłami elementarnymi, z których tworzyć można bardziej złożone formy. Bryłami tymi wypełnia się objętość (zadanie 3D) lub przekrój (zadanie 2D) modelu ciała zaburzającego. Stosując metody optymalizacyjne można odtworzyć działanie grawitacyjne danej formy geologicznej czy antropogenicznej. Tutaj ograniczono się do brył (reprezentujących pustki) o kształcie prostopadłościanu, a także ich złożeń.

Obliczenia przeprowadzono przy użyciu programu komputerowego, specjalnie dostosowanego do modelowania efektów grawitacyjnych wywołanych przez obecność pustek w górotworze, który współpracował z algorytmem przetworzenia twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego o strumieniu pola wektorowego.

## 2. Grawimetria a modelowanie

W ogólności metoda grawimetryczna wykorzystuje zmienność natężenia siły ciężkości  $\Delta g$  (pola grawitacyjnego Ziemi), w zależności od jej budowy. Znamienną tą polega na tym, iż każda niejednorodność w rozkładzie gęstości ośrodka skalnego, zwana ogólnie ciałem zaburzającym, generuje swoje własne pole grawitacyjne. Tym samym rozkład wartości siły ciężkości uzależniony jest w pierwszej kolejności od różnicy gęstości objętościowych skał budujących tę niejednorodność oraz otoczenia. Rozkład ten jest również funkcją rozmiarów, kształtu i głębokości występowania ciała zaburzającego. Zastosowanie tej metody poszukiwawczej daje szczególnie pozytywne rezultaty w wykrywaniu pustek występujących w górotworze, z powodu znacznego kontrastu gęstościowego. Umożliwia również prognozowanie ich ekspansji ku powierzchni terenu i dzięki temu badanie zagrożeń powierzchni. Dla natężenia siły ciężkości (potocznie siły ciężkości) przyjmuje się jednostki przyspieszenia ziemskiego, a więc:  $\text{ms}^{-2}$  (układ SI). W praktyce najczęściej stosuje się nieco mniejsze jednostki, tj.: Gale (układ CGS) równe  $10^{-2} \text{ms}^{-2}$ . Tu jednostkami podstawowymi będą mili gale ( $1 \text{mGal} = 10^{-5} \text{ms}^{-2}$ ) oraz mikro gale ( $1 \text{mGal} = 10^{-3} \text{mGal}$ ) obecnie najszerzej stosowane w badaniach grawimetrycznych.

Problem obliczania grawitacyjnego przyciągania ciał zaburzających o dowolnym kształcie jest, od czasu rozwinięcia się nowoczesnej grawimetrii, jednym z najważniejszych zadań interpretacji grawimetrycznej. Wielu autorów zwraca uwagę, że w ogólności, nie jest możliwe otrzymanie analitycznego wyrażenia na grawitacyjne przyciąganie ciała zaburzającego o kształcie nieregularnym i o dowolnym rozkładzie gęstości [7]. Dlatego poszukuje się takich uproszczeń, które pozwolą jak najwierniej zamodelować efekt grawitacyjny przy zachowaniu „rozsądnego” czasu obliczeń.

Grawitacyjne przyciąganie, ciała o kształcie nieregularnym można najprościej obliczyć, gdy ciało to daje się aproksymować sumą jednorodnych brył o kształtach regularnych [3]. Formuły na grawitacyjne przyciąganie układu takich brył zostały niezależnie wyprowadzone i przedstawione przez takich badaczy, jak: Haáz [8], Sorokin [17], Nagy [14], Hjelt [11] (jako szczególny przypadek równoległościanu), Gliński [6], Hanemann i Lindner [9] oraz Rösler i Lindner [16]. Sposoby obliczania grawitacyjnego przyciągania ciał o kształtach nieregularnych oparte zostały na formułach podanych w pracach: Kolbenhyer [12, 13], Plouff [15], Bojdyś i Lemberger [1], Cady [2], Hanemann i Militzer [9].

W modelowaniu grawimetrycznym wykorzystuje się również twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego do modelowania rozkładu siły ciężkości od nieregularnej bryły odwzorowanej wielościanami. W Polsce rozwiązanie tego problemu przedstawił Wójcicki [18, 19]. W swoich badaniach autor wykorzystał formułę pozwalającą obliczyć grawitacyjne przyciąganie jednorodnego wielościanu, którego ścianami są dowolne wielokąty. Formuła ta, której wyprowadzenie oparto na zastosowaniu twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego, jest słuszna dla punktów pomiarowych położonych w całej przestrzeni: nie tylko w punktach położonych na zewnątrz ciała zaburzającego i na jego brzegu, ale także wewnątrz badanego obiektu (wykorzystanie zasady równoważności w grawimetrii). Różnica między proponowanym w niniejszej pracy wariantem metody wielościanów a wariantami przedstawionymi przez innych autorów polega na innym sposobie obliczania całki po powierzchni ściany wielościanu. Całkowanie odbywa się w tym przypadku po trójkątach wyznaczonych przez kolejne pary wierzchołków ściany i początek lokalnego układu współrzędnych. Pozwala to zmniejszyć ilość transformacji układu współrzędnych do jednej w przypadku rozpatrywanej ściany. Algorytmy opracowane przez tego autora wykorzystano w tej pracy do badań modelowych.

W tej pracy modelowanie zostało przeprowadzone wg zasady tzw. badań modelowych. Badania modelowe stanowią oddzielną grupę zagadnień charakteryzującą się brakiem informacji zarówno o obiekcie zaburzającym, jak i o efekcie jego oddziaływania. W tej grupie modelowań wykonuje się pewien ciąg zadań i symulacji dla rozpoznania zagadnienia i na podstawie ich rezultatów określa się związki funkcyjne pomiędzy obiektem a efektem jego obecności. Wyniki badań modelowych mogą stanowić podstawę do interpretacji oraz są istotnym ułatwieniem przy modelowaniu odwrotnym.

## 3. Metodyka badań

Siła newtonowskiego przyciągania nazywana jest również przyciąganiem grawitacyjnym lub efektem grawitacyjnym. Zwykle, jako przyciąganie rozumiana jest jego składowa pionowa oznaczana  $\Delta g$ . W prawoskrętnym kartezjańskim układzie współrzędnych  $x, y, z$  z osią „ $z$ ” skierowaną w dół w punkcie  $P(0,0,0)$  składowa pionowa grawitacyjnego przyciągania jednorodnego ciała trójwymiarowego wyraża się wzorem

$$F_z(P) = \Delta g(P) = -G \cdot \rho \cdot \frac{\partial}{\partial z} \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dx \cdot dy \cdot dz \quad (1)$$

gdzie:

$G$  – stała grawitacji,  $\rho$  – gęstość ciała zaburzającego,  
 $V$  – objętość ciała a  $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  – odległość.

Zastosowanie twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego pozwala przekształcić całkę objętościową [1] na całkę po całej powierzchni ciała  $S$ , która ogranicza objętość  $V$  [5]:

$$\Delta g(P) = -G \cdot \rho \cdot \iint_S (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cos(N, z) dx \cdot dy \quad (2)$$

gdzie  $N$  jest jednostkowym, zewnętrznym wektorem normalnym do powierzchni  $S$ .

Całkę powierzchniową [2] można w przypadku wielościanu przedstawić jako sumę całek po jego wszystkich ścianach. Wprowadzając nowy układ współrzędnych, powiązany ze starym macierzą Eulera oraz zastępując całkę powierzchniową po  $i$ -tej ścianie wielościanu sumą całek podwójnych po trójkącie wyznaczonym przez bok danego wielokąta i początek układu współrzędnych cylindrycznych otrzymuje się następującą formułę [18]

$$\Delta g(P) = -G \cdot \rho \cdot \sum_{i=1}^n \cos(N_i, z) \cdot \sum_{j=1}^m \left\{ \begin{array}{l} |Z_i| \sin^{-1} \left[ \frac{|\tilde{Z}_i| \sin(\varphi - \alpha_j)}{(\tilde{Z}_i^2 + P_j^2)^{1/2}} \right] - \\ \frac{1}{2} |P_j| \cdot \ln \left( \frac{(\tilde{Z}_i^2 \cdot A + P_j^2 + |P_j| [P_j^2 + \tilde{Z}_i^2 \cos^2(\varphi - \alpha_j)]^{1/2}) B}{(\tilde{Z}_i^2 \cdot B + P_j^2 + |P_j| [P_j^2 + \tilde{Z}_i^2 \cos^2(\varphi - \alpha_j)]^{1/2}) A} \right) - |\tilde{Z}_i| \cdot \varphi \end{array} \right. \quad (3)$$

gdzie

$A = 1 + \sin(\varphi - \alpha_j)$ ,  $B = 1 - \sin(\varphi - \alpha_j)$ ; (odpowiednie przekształcenia podane tamże).

Formuła [3] służąca do obliczania składowej pionowej grawitacyjnego przyciągania jednorodnego wielościanu, którego ścianami są dowolne wielokąty jest słuszną dla punktów położonych na zewnątrz ciała ale również na jego powierzchni oraz wewnątrz ciała (zgodnie z zasadą równoważności w grawimetrii).

Opisana metoda została nazwana przez Wójcickiego metodą Wielościanów i Nieregularnej Siatki Trójkątów (WNST). Zastosowanie metody WNST pozwala na jedną z najdokładniejszych symulacji efektu grawitacyjnego od geologicznych ciał zaburzających w zagadnieniach trójwymiarowego modelowania grawimetrycznego. Autor metody wyraził zgodę (Wójcicki, 2007, 2008 – komunikacja ustna) na jej wykorzystanie do badań oraz udostępnił kod źródłowy programu [17], w celu wykonania niezbędnych modyfikacji dla jego wykorzystania jako algorytmu bazowego. Otworzyło to możliwość stworzenia nowego programu, właściwego dla wykonania serii modelowania efektu grawitacyjnego generowanego przez pustki pogórnice o zmiennych parametrach geometrycznych i fizycznych.

### 3.1. Program komputerowy, parametry obliczeń

Przeprowadzenie badań modelowych na ogół wymaga wykonania kilkudziesięciu czy kilkuset zadań i symulacji, w których odpowiednio parametryzuje się zmienne fizyczne i geometryczne obiektów. Dlatego wykonanie obliczeń i wyłonienie z nich istotnych wyników wymaga stworzenia odpowiedniego, zautomatyzowanego programu komputerowego. Do obliczeń numerycznych zastosowano zupełnie nowy program komputerowy – ModGrav. Kod programu powstał w środowisku Borland-Delphi na platformie Windows w oparciu o zmodyfikowany algorytm opisany wyżej, służący w ogólności do wyznaczania grawitacyjnego przyciągania fragmentów ośrodka geologicznego o określonym kształcie.

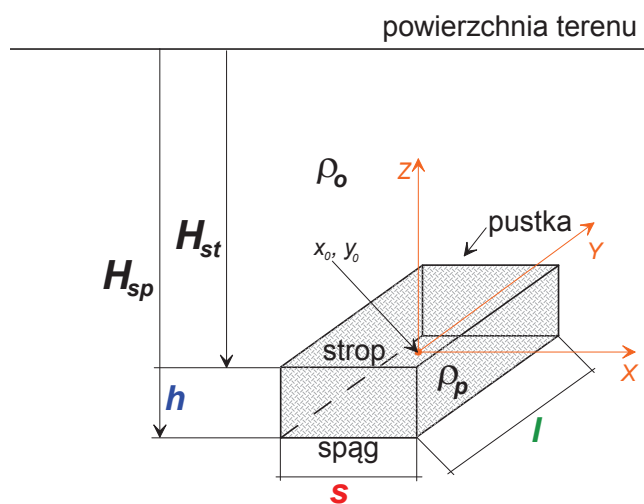
Program umożliwia wielozadaniowość i automatyzację procesu obliczeń, co jest szczególnie istotne gdy liczba wykonanych prób decyduje o jakości wyniku. Jądro programu składa się z podprogramu odpowiedzialnego za transformację układu współrzędnych dla  $i$ -tej ściany wielościanu oraz pod-

programu obliczającego przyczynek  $\Delta g$  od  $i$ -tej ściany. Dane wejściowe, pośrednie i wyniki są plikami tekstowymi ASCII. Dane można wczytywać z owych plików tekstowych, a także zadawać bezpośrednio w odpowiednich zakładkach programu.

Pierwszym krokiem w przygotowaniu zadań jest ustalenie układu współrzędnych kartezjańskich o środku przyjętym w punkcie o zadanych współrzędnych  $x_0, y_0$  i wielkości siatki obliczeniowej  $\Delta x$  na  $\Delta y$  podanej w metrach (np.  $10 \times 10$  tys. m). O wielkości siatki decyduje prowadzący modelowanie zakładając, w jakiej największej odległości od środka układu współrzędnych będzie chciał obserwować efekt grawitacyjny. Następnie zadawana jest geometria prostopadłościennego wyrobiska i jego położenie zgodnie z rysunkiem 1. Ustala

się: długość  $l$  i szerokość  $s$ , oraz głębokość stropu i spągu pod powierzchnią terenu  $H_{st}$ ,  $H_{sp}$  (gdzie wysokość pustki  $h = H_{st} - H_{sp}$ ). Zmienne te zadawane są w metrach. Równolegle zadaje się również zmienne definiujące warunki fizyczne ośrodka, tj. gęstość w pustce  $\rho_p$  i w jej jednorodnym otoczeniu  $\rho_o$  w  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . W polu danych wejściowych można podać jak mają się zmieniać rozmiary pustki wzdłuż osi  $X$  i  $Y$  a więc  $s(x)$  i  $l(y)$  a także zmienność położenia wierzchołków pustki:  $dS_p$ ,  $dL_p$ ,  $dL_s$ . Dodatkowo wprowadzana jest liczba podziałów boków siatki  $n(x)$ ,  $n(y)$  oraz liczba podziałów na krawędziach pustki:  $n(s)$ ,  $n(l)$ . Liczba podziałów decyduje o precyzji obliczeń ale równocześnie o czasie wykonywania poszczególnych zadań. Im ta liczba jest większa, tym większa dokładność ale i dłuższy czas obliczania pojedynczego zadania.

Wykonanie obliczeń na podstawie opisanego algorytmu uruchamiane może być jako pojedyncze zadanie lub, co bardzo usprawnia modelowanie, jako seria zadań wybranych z przygotowanych wcześniej zbiorów danych. Funkcja sumowania wyników wybranych zadań pozwala na uzyskanie



Rys. 1. Parametry i zmienne wykorzystywane w modelowaniu programem ModGrav

Fig. 1. Parameters and variables used in modelling by means of the ModGrav program



sumarycznego wyniku obliczeń dla wielu wybranych wcześniej przypadków. Typowy cykl obliczeń serii 10 symulacji trwał przeciętnie kilka godzin.

Uzyskane rezultaty modelowania gromadzone są w tekstowych zbiorach danych a także zapisywane są automatycznie w plikach o formacie dostosowanym do pakietu graficznego Golden Software SURFER oraz GRAPHER, co pozwala na sporządzanie map i wykresów.

### 3.2. Deskrytory efektu grawitacyjnego

Wynikiem obliczeń programu ModGrav są następujące deskrytory anomalii grawitacyjnej: rozkład anomalii  $Dg$  oraz wartość największa efektu grawitacyjnego  $\Delta g_{\max}$  (w mGal). Tutaj zmienne te dalej będą oznaczane odpowiednio:  $A(x,y)$  i  $A_{\text{ext}}$  w celu odróżnienia oznaczeń dla rzeczywistego (pomierzonego) rozkładu siły ciężkości i jej anomalii od rozkładów syntetycznych uzyskanych w toku modelowania (zależność  $A(x,y)$  od  $A_{\text{ext}}$  podano dalej). Ponadto w celu zobrazowania pewnych cech badanych związków w kilku przypadkach przyjęto, że wartość anomalii jest wymiarem pionowym i wprowadzono dodatkowy deskrytor, jakim jest „objętość” anomalii  $V_A$  (o wymiarze mGal·m<sup>2</sup>). W programie ModGrav jest również możliwość obliczania względnej „objętości” anomalii oznaczanej –  $wV_A$ . Wielkość ta jest definiowana jako stosunek  $V_A$  do objętości pustki  $V_p$  (w m<sup>3</sup>), a jej wymiarem jest mGal·m<sup>-1</sup>. Ten deskrytor nie został dotychczas wykorzystany w pracy.

Wielkość  $V_A$  odpowiada całe zaburzenia a jej wyliczenie jest jedną z metod interpretacji bezpośredniej anomalii grawimetrycznych. Stosuje się ją do rozwiązywania zadania odwrotnego, czyli analizy efektu grawitacyjnego wywołanego przez nieznaną ciało zaburzące. Tutaj metoda ta została wykorzystana w zadaniu prostym jako jeden z deskrytorów anomalii syntetycznej wywołanej przez pustkę poeksploatacyjną o znanych parametrach. Metoda ta polega na szacowaniu anomalii poprzez przybliżone całkowanie anomalii siły ciężkości w obszarze jej występowania [4]. W tej pracy sposób obliczania deskryptora  $V_A$  polega na sumowaniu po skończonym obszarze, obejmującym prostokąt siatki obliczeniowej (siatki obserwacji efektu) o bokach  $\Delta x$  i  $\Delta y$  ze środkiem w pkt.  $x_0, y_0$  nad środkiem geometrycznym pustki.

### 3.3. Sposób prowadzenia modelowania i analizy wyników

Złożony problem, jakim jest poszukiwanie związków funkcyjnych pomiędzy parametrami geometrycznymi pustki wypełnionej różnymi mediami a rozkładem generowanej przez nią anomalii, wymaga znacznych uproszczeń analitycznych, takich jak redukcja przestrzeni pomiarowej, parametryzacja wymiarów geometrycznych ciała zaburzonego oraz gęstości otoczenia i mediów wypełniających pustkę. Wtedy wpływ pojedynczego wyrobiska na rozkład anomalii zapisać można ogólnie w postaci związku

$$A(x, y) = f(l, s, H_{st}, H_{sp}, \rho_p, \rho_o; x, y) \quad (4)$$

Pierwszym uproszczeniem tak złożonego zagadnienia jest wprowadzenie do modelowania wyrobiska chodnikowego i określenie jego wpływu na efekt grawitacyjny w przekroju prostopadłym  $y=y_0$ , a rozkład anomalii można zapisać jako

$$A(x, y_0) = A(x) = f(l, s, H_{st}, H_{sp}, \rho_p, \rho_o; x) \quad (5)$$

Dalsze uproszczenie polega na sprowadzeniu obliczeń do punktu  $x=x_0$ , przyjętym nad środkiem geometrycznym

wyrobiska czyli w przypadku bryły o jednorodnej gęstości – miejsca występowania największej wartości anomalii  $A_{\text{ext}}$

$$A(x_0) = A_{\text{ext}} = f(l, s, H_{st}, H_{sp}, \rho_p, \rho_o) \quad [6]$$

Po znalezieniu związku  $l, s, H_{st}, H_{sp}, \rho_p, \rho_o$  z  $A_{\text{ext}}$  dążono do określenia tych związków poszukując rozkładów  $A(x,y)$  w przestrzeni  $(x, y_0)$ , a następnie w przestrzeni  $(x,y)$ . Znając rozkład anomalii  $A$  w przestrzeni  $(x,y)$  od pojedynczego wyrobiska można określić w przybliżeniu oddziaływania wielu wyrobisk na punkty siatki obserwacyjnej poprzez sumowanie, w każdym punkcie siatki wpływów poszczególnych pustek.

W ramach tej pracy przedstawiono tylko wyniki badań dla określenia wpływów pojedynczego wyrobiska na przestrzeń  $(x,y)$  i ustalono następujący tryb postępowania dla uzyskania związków funkcyjnych w pojedynczym zadaniu modelowym

1. wybór zmiennej (spośród  $l, s, H_{st}, H_{sp}, \rho_p, \rho_o$ ) do badania jej wpływu na wartość anomalii,
2. ustalenie zakresu zmienności badanej wielkości i liczby  $n$  symulacji efektu grawitacyjnego – czyli ‘gęstości próbkowania’ w obrębie przedziału zmienności tej wielkości,
3. zadanie wartości pozostałych zmiennych ( $l, s, H_{st}, H_{sp}, \rho_p, \rho_o$ ) stających się w tym momencie parametrami konkretnego zadania modelowego,
4. przeprowadzenie symulacji programem ModGrav i uzyskanie  $n$  wartości rozkładów anomalii  $A$  lub wartości największych anomalii  $A_{\text{ext}}$ ,
5. uzyskanie z modelowania wartości anomalii w punktach dyskretnej funkcji [4-6] o nieznannej postaci algebraicznej
6. poszukiwanie funkcji aproksymacyjnej na podstawie rozkładu graficznego ww punktów, spełniającej warunki:
  - względna prostota funkcji – minimalizacja ilości stałych;
  - weryfikacja doboru funkcji ze względu na jej sens fizyczny – analiza przebiegu funkcji (przejście przez zero, przecięcia z osiami  $X, Y$ , ewentualna asymptotyczność);
  - minimalizacja odchylenia od danych otrzymanych z modelowania,
7. przedstawienie funkcji aproksymacyjnej oraz wyników symulacji na wykresie, wraz z podaniem formy algebraicznej bieżącego dopasowania,
8. ustalenie wartości stałych funkcji aproksymacyjnej ze względu na wymogi analizy wymiarowej (zgodność jednostek).

Walorem takiej metodyki postępowania jest możliwość uzyskania wielu prostych związków funkcyjnych pomiędzy wielkościami geometrycznymi i fizycznymi charakteryzującymi pustkę a anomalią przez nią wywołaną. Związki te już na tym etapie badań mogą być wykorzystane przy interpretacji grawimetrycznych niektórych danych pomiarowych, jak również weryfikacji wyników interpretacji zmniejszając niepewność otrzymanych rezultatów. Rozwiązanie tak postawionego problemu stanowi punkt wyjścia do konstrukcji metody poszukiwania wyrobisk poeksploatacyjnych na podstawie pomierzonych w terenie anomalii siły ciężkości  $\Delta g$  stosując analizę odwrotną.

## 4. Wyniki i interpretacja

W ramach pracy badawczej realizowanej przez autora w ramach działalności statutowej GIG (symbol: 11060499-124) w latach 2009-2010 przeprowadzono kilkaset modeli  $A(x,y)$ ,  $A_{\text{ext}}$  i  $V_A$  nad prostymi modelami pustek reprezentowanymi przez prostopadłościan o zmiennych parametrach

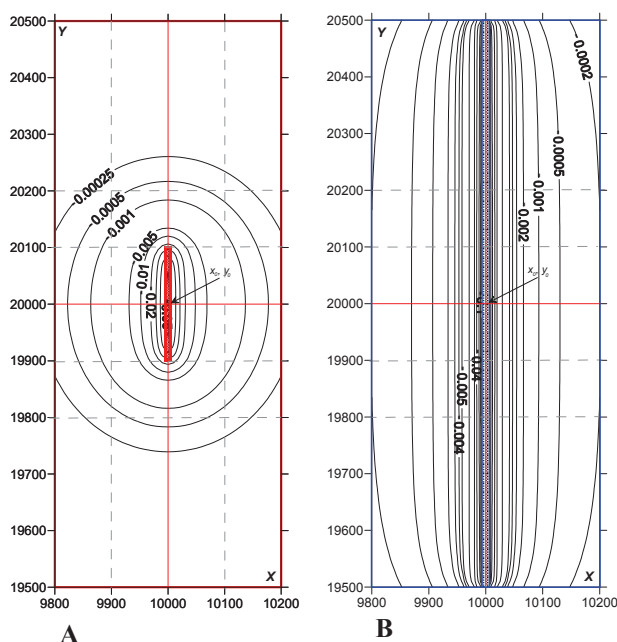
geometrycznych. Do przedstawienia tutaj wybrano tylko kilka najbardziej reprezentatywnych przykładów, ujętych umownie w typy symulacji określane mianem „zadań”.

W dalszej części pracy przez wyrażenie „gęstość pustki” należy rozumieć gęstość mediów wypełniających pustkę. W badaniach wyróżniano różną gęstość mediów całkowicie wypełniających przestrzeń pustki zakładając, że są one większe lub równe  $10 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , co jest wartością typową przyjmowaną w publikacjach. Gęstość utworów jednorodnego otoczenia wszędzie ustalono na  $2500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Wpływ zmiany gęstości zarówno w pustce jak i w otoczeniu był również przedmiotem badań. W niektórych miejscach dla uzgodnienia wymiarów posłużono się takimi stałymi, jak: szerokość jednostkowa,  $s_0=1 \text{ m}$ , pole jednostkowe  $p_0=1 \text{ m}^2$ , gęstość jednostkowa  $\rho_0=1 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Ze względu na potrzebę zastosowania skali logarytmicznej na niektórych wykresach anomalie grawitacyjną przedstawiono tam jako  $-A_{\text{ext}}$ .

#### 4.1. Określenie wymiaru przestrzeni modelowej

W pierwszej fazie badań modelowych poszukiwano warunków redukcji wymiaru przestrzeni obliczeniowej. Dla ułatwienia analizy wyników postępowano w taki sposób, żeby dobrać jak najmniejszy wymiar przestrzeni, w której występuje poszukiwany efekt przy jednoczesnym uwzględnieniu maksymalnej zmienności położenia pustki.

Przeanalizowano efekt grawitacyjny od pustki w formie wyrobiska poziomego na stałej głębokości parametryzowanej długością  $l$ . Prezentuje się tutaj dwa rozkłady  $A(x,y)$  pochodzące od chodników o przekroju  $s=h=10 \text{ m}$  oraz długości  $l=200$  i  $1000 \text{ m}$  znajdujących się na głębokości  $100 \text{ m}$  ppt (rys. 2). Rezultat modelowania potwierdza, że wymiar  $l$  odgrywa rolę w rozkładzie anomalii  $A(x,y)$  tylko dla małych wartości  $l$  (rys. 2a). Dla znacznie większego  $l$  rozkład  $A(x,y)$  można sprowadzić do  $A(x)$  bez utraty istotnych informacji (rys. 2b).



Rys. 2. Rozkłady  $A(x,y)$  dla wyrobiska chodnikowego o długości a – 200 m i b – 1000 m

Fig. 2. Distributions of  $A(x,y)$  for a roadway of length a – 200 m and b – 1000 m

Powyższe symulacje zostały wykonane dla ustalonych wartości  $s$  i  $h$  oraz głębokości  $H_{\text{st}}$ . Zwiększenie  $s$  lub  $h$  ograniczać będzie przedział zgodności 2D z 3D, zatem dalsze analizy w przestrzeni 2D powinny być prowadzone dla wyrobisk na głębokościach nie przekraczających  $100 \text{ m}$  przy długości co najmniej  $l=1000 \text{ m}$ .

Na podstawie wyników tych symulacji przyjmując odpowiednie rozmiary ( $l$ ) pustki, dalsze symulacje wykonywano w przestrzeni trójwymiarowej, natomiast wyniki i ich analiza prowadzona była dla uproszczenia w przestrzeni dwuwymiarowej.

Kolejnym krokiem było określenie wpływu wyrobiska o długości  $l=1000 \text{ m}$  parametryzowanego szerokością  $s$  pustki na rozkład wartości anomalii grawitacyjnej (rys. 3a). Profile poprowadzone linią czarną przechodzą przez środek chodnika równoległe do osi  $X$  a linią niebieską równoległe do osi  $Y$ . Wpływ obecności pustki wyraźnie charakteryzuje rozkład wzdłuż kierunku poprzecznego  $X$  a przyrost anomalii na kierunku  $Y$  można pominąć w odległości do  $200 \text{ m}$  od środka wyrobiska.

Rysunek 3b przedstawia wyniki analogicznej analizy z parametryzacją głębokością stropu  $H_{\text{st}}$  natomiast wymiary pustki pozostawały bez zmian. Kolorem czarnym zaznaczono anomalie występujące na kierunku  $X$  a kolorem czerwonym na prostopadłym kierunku  $Y$ . Podobnie jak w poprzednim przypadku efekt grawitacyjny dla kierunku  $X$  jest o wyraźnie zauważalny. W obydwu przypadkach anomalia maleje w miarę wzrostu odległości od środka pustki, ale zmienność amplitudy anomalii jest o większa na kierunku  $X$ .

Przedstawione rozkłady anomalii wzdłuż kierunków  $X$  i  $Y$  siatki obliczeniowej na powierzchni terenu pokazano dla uzasadnienia możliwości ograniczenia się w analizach tylko do kierunku  $X$ , a także prezentacji wyników na dwuwymiarowych wykresach krzywych. Dalej prezentuje się wyniki właściwych badań modelowych.

#### 4.2. Modelowanie wpływu gęstości

Badano wpływ podstawowej zmiennej w badaniach grawimetrycznych, tj. różnicy gęstości mediów wypełniających pustkę oraz gęstości otoczenia na dwa główne deskrytory anomalii  $A_{\text{ext}}$  i  $V_A$ . Analizowano wpływ ciągu różnic gęstości na zmianę tych wielkości. Pustką w zadaniu był chodnik o stałej wysokości i szerokości równej  $10 \text{ m}$ . Chodnik „umieszczono” na głębokości  $20 \text{ m}$  ppt. Wyniki przeprowadzonych symulacji przedstawia rysunek 4.

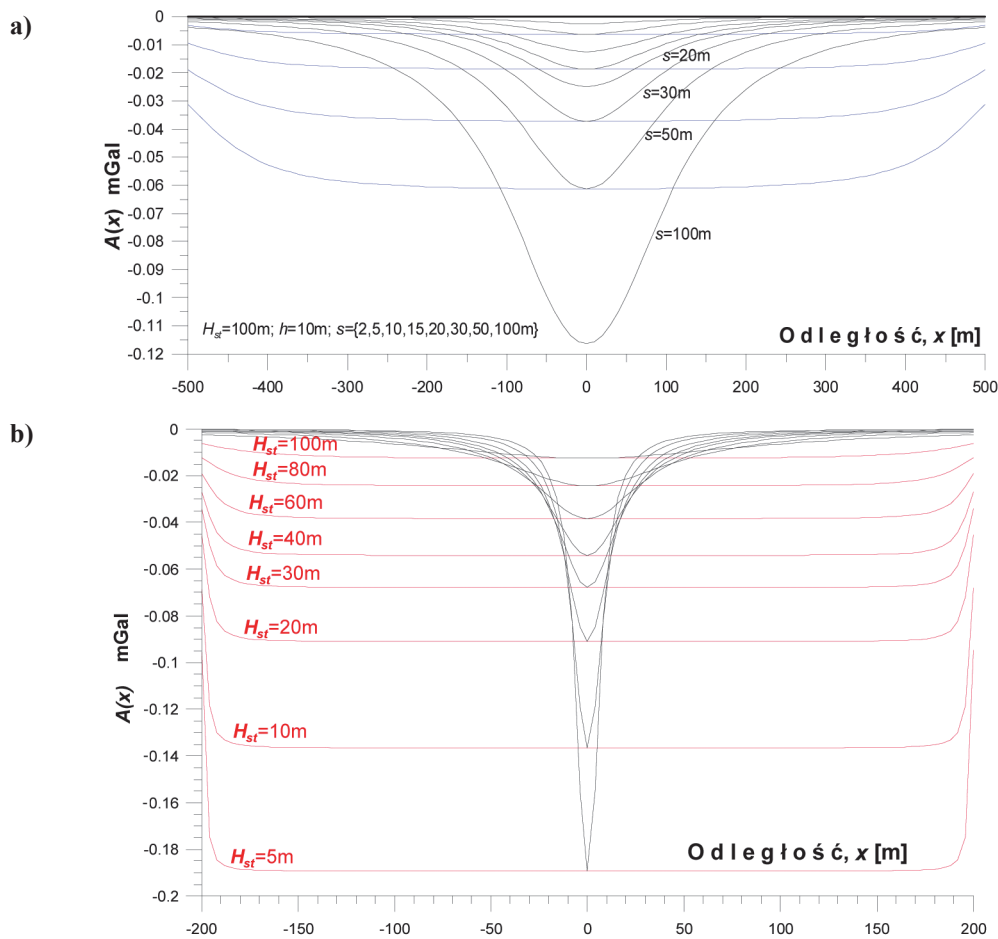
Wyniki modelowania zaznaczone na wykresie krzyżami i kółkami aproksymować można funkcjami liniowymi (linia różowa i czarna). Najlepsze dopasowania do otrzymanych wyników obliczeń stanowią związki funkcyjne między różnicą gęstości a ekstremum anomalii  $A_{\text{ext}}$  i objętością względną anomalii  $V_A$  podane poniżej w formie algebraicznej oraz na rysunku 4 wzdłuż odpowiednich funkcji aproksymacyjnych.

$$A_{\text{ext}}(\Delta\rho) = -2,16 \cdot 10^{-5} \cdot (\rho_o - \rho_p) \text{ mGal}\cdot\text{m}^3/\text{kg} \quad (7)$$

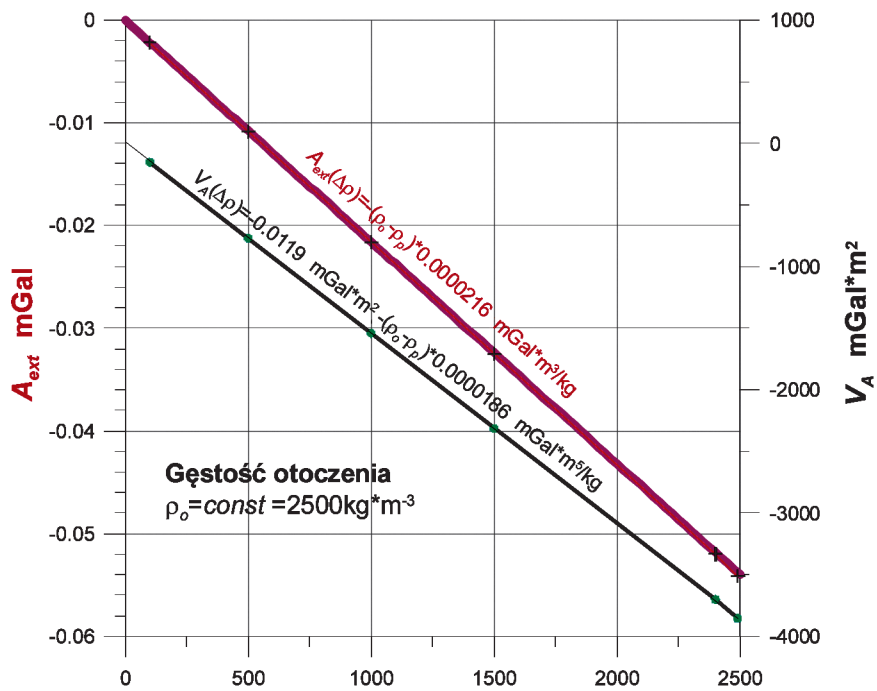
$$V_A(\Delta\rho) = -1,86 \cdot 10^{-5} \cdot (\rho_o - \rho_p) - 1,19 \cdot 10^{-2} \text{ mGal}\cdot\text{m}^5 \quad (8)$$

Wielkości te są wprost proporcjonalne do różnicy gęstości otoczenia i pustki. W tablicy 1 zestawiono parametry symulacji przeprowadzonych w ramach bieżącego zadania wraz z wynikami obliczeń  $A_{\text{ext}}$  i  $V_A$ .

Zależności [7, 8] mogą być przydatne do określania wpływu różnicy gęstości w pustce i otoczeniu  $\Delta\rho$  lub stopnia jej wypełnienia różnymi mediami, jeżeli znane są (z pomiarów terenowych) rozkłady anomalii i szacowane są wymiary pustki.



Rys. 3. Profile podłużne i poprzeczne dla chodnika  $l=1000$  m parametryzowane a – szerokością  $s$  i b – głębokością  $H_{st}$  (rys. 2b)  
 Fig. 3. Longitudinal and transverse profiles for the roadway  $l=1000$  m parametrized by a – width  $s$  and b – depth  $H_{st}$  (Fig. 2b)



Rys. 4. Zależność  $A_{ext}$  i  $V_A$  od gęstości wypełnienia pustki  
 Fig. 4. Dependence of  $A_{ext}$  and  $V_A$  on the density of void filling

**Tablica 1. Wartości  $A_{\text{ext}}$  i  $V_A$  przy zmiennej gęstości pustki,  $s = h = 10$  m,  $l = 1000$  m,  $H_{\text{st}} = 20$  m,  $H_{\text{sp}} = 30$  m**  
**Table 1. Values of  $A_{\text{ext}}$  and  $V_A$  under variable void density,  $s = h = 10$  m,  $l = 1000$  m,  $H_{\text{st}} = 30$  m**

$H_{\text{st}}$ m	$H_{\text{sp}}$ m	$A_{\text{ext}}$ mGal	$V_A$ mGal·m <sup>2</sup>	$\rho_p$ kg/m <sup>3</sup>	$\rho_o$ kg/m <sup>3</sup>	$\Delta\rho$ kg/m <sup>3</sup>
20	30	-0.054154	-3854	10	2500	2490
20	30	-0.051988	-3700	100	2500	2400
20	30	-0.032492	-2313	1000	2500	1500
20	30	-0.021661	-1542	1500	2500	1000
20	30	-0.010831	-771	2000	2500	500
20	30	-0.002166	-154	2400	2500	100

### 4.3. Modelowanie wpływu szerokości

W kolejnej fazie modelowań przeprowadzono symulacje zależności  $A_{\text{ext}}$  i  $V_A$  od szerokości pustki parametryzowanych głębokością jej występowania. Szerokość pustki zadano jako: 2, 5, 10, 15, 20, 30m a parametr głębokość zmieniał się tak że:  $H_{\text{st}} = 20, 50$  i 100m. Rezultaty symulacji przedstawia Tabela 2 oraz Rys. 5 i 6.

Na rysunku 5 przedstawiono wpływ badanych zmiennych i parametru na deskryptor  $A_{\text{ext}}$  a na rysunku 6 na  $V_A$ . W toku analizy danych otrzymanych z modelowania w tym zadaniu (tabl. 2) wyznaczono związki funkcyjne  $A_{\text{ext}}$  i  $V_A$  z szerokością chodnika  $s$ . Formuły te podano dla głębokości występowania pustki  $H_{\text{st}} = 50$ m. Odpowiednie wzory zamieszczone są w górnej części wykresów i podane w ogólniejszej formie w końcowej części tego podrozdziału.

Na wykresach widoczne jest, że  $A_{\text{ext}}$  i  $V_A$  w funkcji  $s$  w pierwszym przybliżeniu są zależnościami liniowymi. Wartości anomalii grawitacyjnej ze wzrostem szerokości pustki odchyła się od funkcji liniowej  $A_{\text{ext}}(s)$  i  $V_A(s)$  dla bardzo małych głębokości. Jest to szczególnie dobrze zauważalne na rysunku 6 dla  $H_{\text{st}} = 20$ m.

Na podstawie wyników modelowania wyznaczono związki funkcyjne dla tej części tego zadania. Przedstawiają się one następująco:

$$A_{\text{ext}} = C_1 \cdot s \quad (8)$$

$$V_A = C_2 \cdot s \quad (9)$$

gdzie uzyskane z obliczeń wartości stałych  $C_1$  i  $C_2$  o wymiarach odpowiednio [mGal/m] i [mGal·m] podane są w tabelicy 2. W tabelicy zestawiono również parametry poszczególnych symulacji w bierzącym zadaniu.

Liniowość zależności  $A_{\text{ext}}$  i  $V_A$  od szerokości pustki dotyczy małych wartości  $s$  i  $h$ . Dla dużych szerokości i małych głębokości ujawnia się nieliniowość związków  $A_{\text{ext}}(s)$  i  $V_A(s)$ .

### 4.4. Wpływ głębokości stropu i spągu

Następne zadanie polegało na badaniu zmienności wartości  $A_{\text{ext}}$  w funkcji głębokości stropu  $H_{\text{st}}$  i spągu  $H_{\text{sp}}$  pustki. Poszukiwano trzech funkcji opisujących zależność  $A_{\text{ext}}(H_{\text{st}}, H_{\text{sp}})$  dla zmiennych w postaci:  $H_0 = (H_{\text{st}} + H_{\text{sp}})/2$  określającego położenie środka pustki; położenia stropu  $H_{\text{st}}$  oraz względnej głębokości  $H_{\text{st}}/H_{\text{sp}}$ . Pustki w tym zadaniu miały stałe rozmiary:  $s = h = 10$ m. Parametry obliczeń zmieniały się następująco:  $H_{\text{st}}/H_{\text{sp}} = 5/15, 10/20, 15/25, 20/30, 30/40, 40/50, 60/70, 80/90, 100/110, 12/130$  m/m;  $H_0 = 7, 10, 15, 20, 25, 35, 45, 55, 65, 85, 105, 125$  m;  $H_{\text{st}} = 2, 5, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 100, 120$  m. Wyniki symulacji przedstawia rysunek 7.

Uzyskane funkcje ekstremum anomalii dla tych samych położen wyrobiska oznaczono: dla zmiennej  $H_{\text{st}}/H_{\text{sp}}$  kolo-

rem niebieskim, dla zmiennej  $H_0$  kolorem czerwonym i dla zmiennej  $H_{\text{st}}$  kolorem zielonym. Z otrzymanych dopasowań krzywych do wyników obliczeń wyznaczono formuły najlepiej opisujące odpowiedni związek zmiennych:

$$A_{\text{ext}} = \frac{C_3}{H_{\text{st}} + H_{\text{sp}}}, \quad C_3 < 0 \quad (9)$$

$$A_{\text{ext}} = \frac{C_4}{H_{\text{st}}}, \quad C_4 < 0 \quad (10)$$

$$A_{\text{ext}} = C_5 \cdot \ln\left(\frac{H_{\text{st}}}{H_{\text{sp}}}\right), \quad C_5 > 0 \quad (11)$$

Forma funkcji  $A_{\text{ext}}$  od  $H_{\text{st}}$  i  $H_{\text{sp}}$  wskazuje, że taki sam argument funkcji  $H_{\text{st}}/H_{\text{sp}}$  uzyskuje się dla różnych par  $H_{\text{st}}, H_{\text{sp}}$ . W konsekwencji na przykład tę samą wartość anomalii w punkcie ekstremalnym, wywoła pustka na głębokościach od 10 do 17,5m i od 80 do 100m, bo  $10/17,5 = 80/100$ . W tych dwóch przypadkach różny będzie jednak rozkład anomalii w kierunku  $X$  czyli można stwierdzić, że zasięg zaburzenia zależy od wysokości pustki.

Generalnie funkcje aproksymacyjne  $F$  od argumentu  $\phi$  powinny spełniać ogólną zasadę superpozycji, czyli:  $F(\phi_1 + \phi_2) = F(\phi_1) + F(\phi_2)$ . Oznaczając trzy głębokości odpowiednio  $H_1 < H_2 < H_3$ , można wykazać, że:  ${}^{1,2}A_{\text{ext}}(H_1, H_2)$ ,  ${}^{2,3}A_{\text{ext}}(H_2, H_3)$  oraz  ${}^{1,3}A_{\text{ext}}(H_1, H_3)$ . Zgodnie z zasadą superpozycji powinno się otrzymać:  ${}^{1,3}A_{\text{ext}} = {}^{1,2}A_{\text{ext}} + {}^{2,3}A_{\text{ext}}$ . Zasadę tę spełnia tylko funkcja [11], bo,

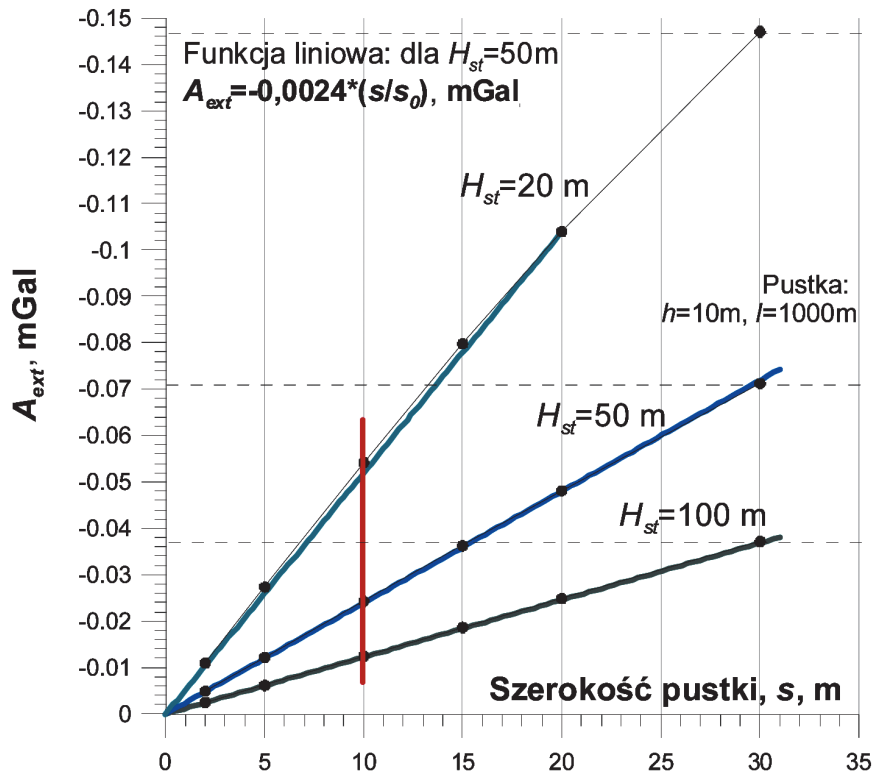
$$C_5 \ln\left(\frac{H_1}{H_2}\right) + C_5 \ln\left(\frac{H_2}{H_3}\right) = C_5 (\ln H_1 - \ln H_2 + \ln H_2 - \ln H_3) = C_5 (\ln H_1 - \ln H_3) = C_5 \ln\left(\frac{H_1}{H_3}\right) \quad (12)$$

W tabelicy 3 przedstawiono dane otrzymane z modelowania, obliczone od poszczególnych efektów oraz uzyskane z ich sumowania. Mimo że najlepsze dopasowanie funkcji aproksymacyjnych uzyskano dla hiperbol [9] i [10], w dalszej analizie posłużono się formułą [11], która uwzględnia wysokość pustki ( $H_{\text{st}} - H_{\text{sp}}$ ), spełnia zasadę superpozycji a logarytmowane wyrażenie jest bezwymiarowe.

Wartości stałej  $C_5$  zależą będą od wymiarów pustki, które w tym zadaniu były ustalone. Funkcja [11] wskazuje, że efekt grawitacyjny (anomalii) zanika ze wzrostem głębokości i ze spadkiem różnicy  $H_{\text{st}} - H_{\text{sp}}$  czyli wysokości pustki

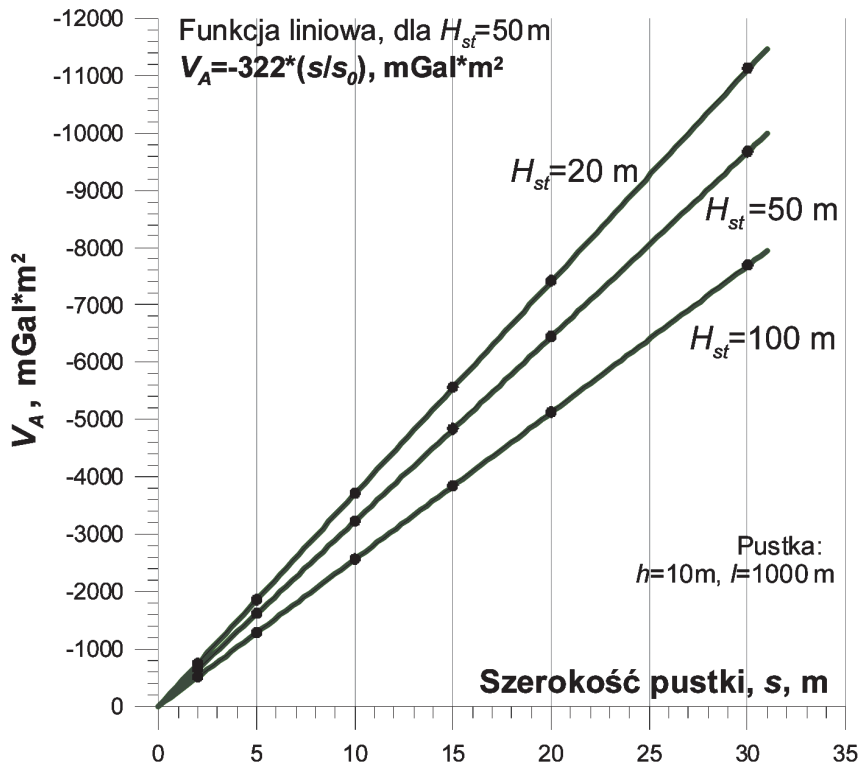
$$\lim_{H_{\text{st}} \rightarrow H_{\text{sp}}} \ln\left(\frac{H_{\text{st}}}{H_{\text{sp}}}\right) \rightarrow 0 \quad (13)$$





Rys. 5. Zależność  $A_{ext}$  od szerokości pustki  $s$  dla trzech głębokości;  $s_0$  jest stałą wymiarową = 1 m

Fig. 5. Dependence of  $A_{ext}$  on the width of void  $s$  for three depths;  $s_0$  is a dimensional constant = 1 m



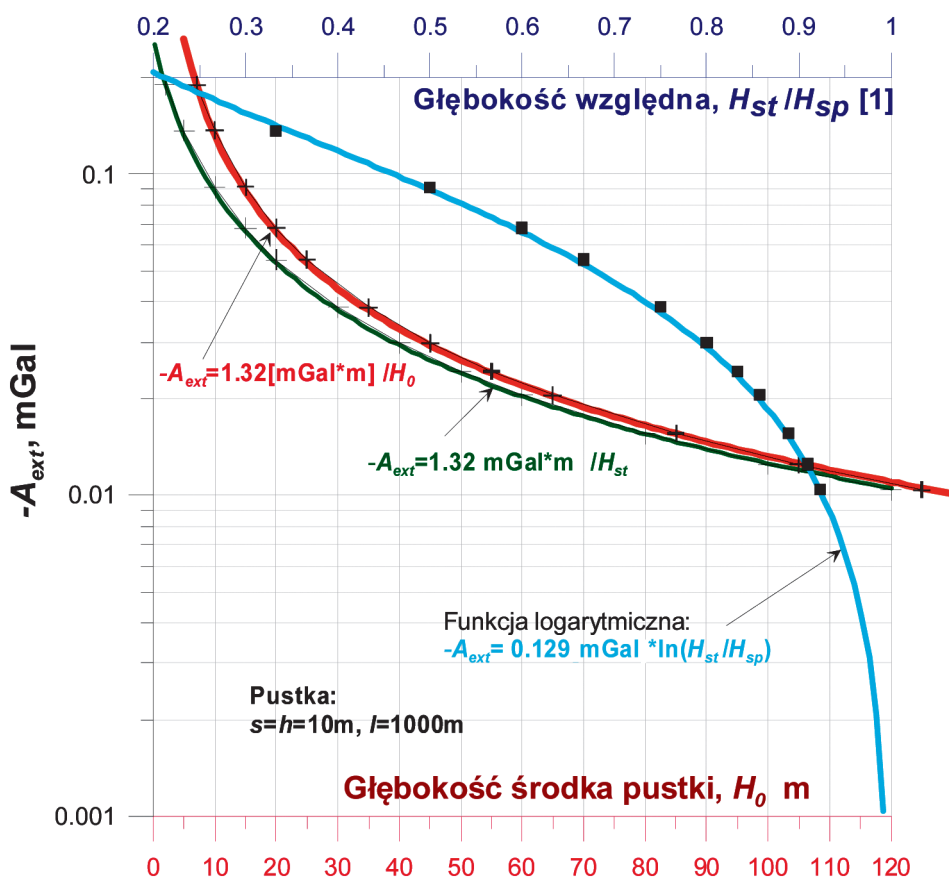
Rys. 6. Zależność  $V_A$  od szerokości pustki  $s$  dla trzech głębokości;  $s_0$  jest stałą wymiarową = 1 m

Fig. 6. Dependence of  $V_A$  on the width of void  $s$  for three depths;  $s_0$  is a dimensional constant = 1 m



Tablica 2. Wartości  $A_{ext}$  i  $V_A$  dla chodnika  $h=10$  m i  $l=1000$  m w funkcji  $s$   
 Table 2. Values of  $A_{ext}$  and  $V_A$  for the roadway  $h=10$  m and  $l=1000$  m in the function  $s$

$s$ m	$H_{st}$ m	$-A_{ext}$ mGal	$V_A$ mGal·m <sup>2</sup>	$C_1$ mGal/m	$C_2$ mGal·m
2	20	-0,0110	-742	-0,01023	-250
5	20	-0,0274	-1855		
10	20	-0,0542	-3710		
15	20	-0,0798	-5565		
20	20	-0,1040	-7420		
30	20	-0,1471	-11129	-0,0024	-322
2	50	-0,0049	-645		
5	50	-0,0122	-1613		
10	50	-0,0243	-3225		
15	50	-0,0363	-4838		
20	50	-0,0482	-6450	-0,0052	-370
30	50	-0,0713	-9673		
2	100	-0,0025	-513		
5	100	-0,0062	-1283		
10	100	-0,0125	-2565		
15	100	-0,0187	-3847		
20	100	-0,0249	-5129		
30	100	-0,0372	-7692		



Rys. 7. Wpływ głębokości na wartość  $-A_{ext}$  dla pustki  $s=h=10$  m i  $l=1000$  m. Wartości anomalii ekstremalnej są tu  $>0$  ponieważ zastosowano skalę logarytmiczną  
 Fig. 7. Influence of depth on the value of  $-A_{ext}$  for the void  $s=h=10$  m and  $l=1000$  m. The values of the extreme anomaly are here  $>0$  because the logarithmic scale was used

Jeżeli  $H_{st}$  rośnie do nieskończoności, to funkcja [13] maleje do zera.

#### 4.5. Ekstremum anomalii w funkcji $s$ dla $l=4000$ m

Kończącą fazę badań stanowił powrót do modelowania wpływu szerokości pustki  $s$  [1 do 500 m] na wartość  $A_{ext}$  z wykorzystaniem rezultatów z poprzedniego zadania ([11]). Przyjęto, że chodnik o wysokości  $h=10$  m położony jest na głębokości  $H_{st}=10$  m i 70 m. Ze względu na znaczne wymiary poprzeczne pustki w górnym przedziale zmienności długość chodnika ustalono na  $l=4000$  m.

Wyniki obliczeń (rys. 8) najdokładniej aproksymować można dwiema funkcjami: liniową  $\ln(H_{st}/H_{sp})$  z jednym współczynnikiem dla  $s$  [1 do 20m], na wykresie oznaczoną kolorem czerwonym i potęgową z dwoma współczynnikami dla  $s$  [20 do 500m] zaznaczoną kolorem zielonym.

Forma algebraiczna dopasowań przedstawia się następująco:

$$A_{ext} = C_6(s) \cdot \ln \frac{H_{sp}}{H_{st}}, \quad C_6 < 0 \quad \text{dla } s \in [1 \text{ do } 20 \text{ m}]$$

$$A_{ext} = C_7(s) \cdot \left[ 1 - \left( \frac{H_{sp}}{H_{st}} \right)^{C_8(s)} \right], \quad C_7, C_8 < 0 \quad \text{dla } s \in [20 \text{ do } 500 \text{ m}] \quad (14)$$

Uzyskane z obliczeń wartości parametrów funkcji aproksymacyjnych zestawiono w tabelicy 4.

W następnym kroku aproksymacyjnym otrzymane wartości współczynników  $C_6(s)$ ,  $C_7(s)$ ,  $C_8(s)$  we wzorach 14 wyrazić należy funkcjami szerokości chodnika  $s$  (rys. 9):

$$C_6(s) = -0,007 - 0,0119 \frac{s}{s_0} \approx -0,012 \frac{s}{s_0}$$

$$C_7(s) = -0,20 - 0,0175 \exp \left( 1 - 0,0354 \frac{s}{s_0} \right) \quad (15)$$

$$C_8(s) = -0,26 - 0,385 \frac{s}{s_0} \approx -0,035 \frac{s}{s_0}$$

Ostatecznie dla długiego chodnika ( $l=4000$ m) o szerokości  $s \in [1 \text{ do } 500 \text{ m}]$ , uwzględniając znak ujemnej wartości anomalii przez odwrócenie argumentu w funkcji *logarytmicznej*, wzory mają postać:

$$A_{ext} = -0,012 \frac{s}{s_0} \ln \frac{H_{sp}}{H_{st}} \quad \text{dla } s \in [1 \text{ do } 20 \text{ m}]$$

$$A_{ext} = \left[ 0,20 + 0,0175 \exp \left( 1 - 0,0354 \frac{s}{s_0} \right) \right] \cdot \left[ 1 - \left( \frac{H_{sp}}{H_{st}} \right)^{-0,035 \frac{s}{s_0}} \right] \quad (16)$$

dla  $s \in 20 \text{ do } 500 \text{ m}$

gdzie  $s_0 = 1$  m jest szerokością jednostkową wprowadzoną dla uzgodnienia wymiarów.

Tak więc dla pustek o małych wymiarach  $s$  i dużych wymiarach  $l$  w podobnych analizach powinna być brana pod uwagę funkcja logarytmiczna (11).

#### 5. Podsumowanie i wnioski

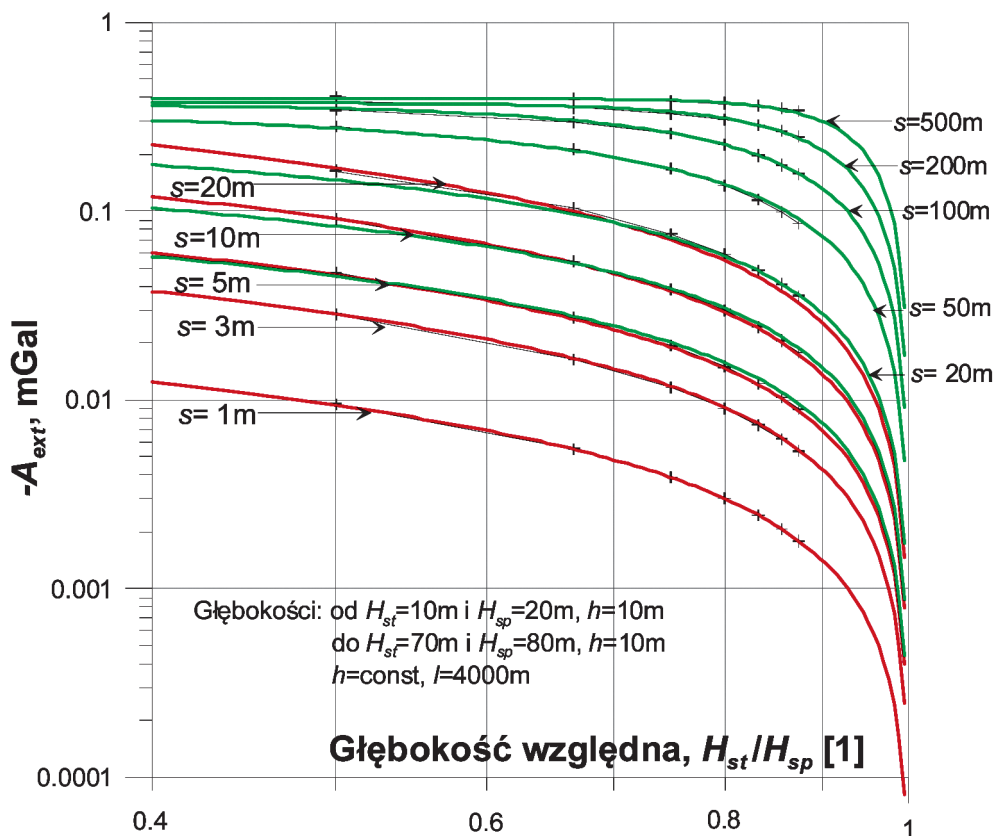
Celem pracy było określenie prostych związków funkcyjnych pomiędzy parametrami fizycznymi i geometrycznymi

**Tabela 3. Zestawienie wyników testu superpozycji**  
**Table 3. Specification of superposition test results**

nr symulacji	$H_{sp}$ m	$H_{st}$ m	$V_p$ tys.m <sup>3</sup>	$A_{ext}$ mGal	$\Sigma(A_{ext})$ mGal	nr symulacji
50	20	10	100	-0,091029		
51	30	20	100	-0,054154		
52	40	30	100	-0,038470		
53	50	40	100	-0,029800		
54	60	50	100	-0,024295		
55	30	10	200	-0,145183	<b>-0.145183</b>	<b>50+51</b>
56	40	10	300	-0,183653	<b>-0.183653</b>	<b>50+51+52</b>
57	50	10	400	-0,213453	<b>-0.213453</b>	<b>50+51+52+53</b>
58	60	10	500	-0,237747	<b>-0.237747</b>	<b>50+51+52+53+54</b>

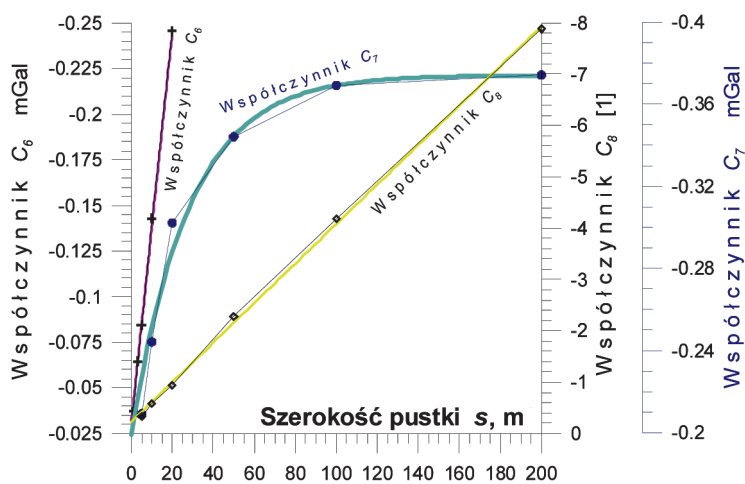
**Tabela 4. Wartości parametrów funkcji aproksymacyjnych**  
**Table 4. Values of parameters of approximation functions**

$s$ m	typ funkcji aproksymacyjnej ze względu na $s$	$C_6(s)$ mGal	$C_7(s)$ mGal	$C_8(s)$ l
1	funkcja liniowa $\ln(H_{st}/H_{sp})$	-0,0135		
3	funkcja liniowa $\ln(H_{st}/H_{sp})$	-0,041		
5	funkcja liniowa $\ln(H_{st}/H_{sp})$	-0,066	-0,210	-0,35
10	funkcja liniowa $\ln(H_{st}/H_{sp})$	-0,131	-0,235	-0,63
20	funkcja liniowa $\ln(H_{st}/H_{sp})$	-0,245	-0,335	-0,87
50	funkcja potęgowa		-0,355	-2,20
100	funkcja potęgowa		-0,365	-4,20
200	funkcja potęgowa		-0,375	-7,90
500	funkcja potęgowa		-0,395	-13,50



Rys. 8. Anomalia  $-A_{ext}$  w funkcji  $H_{st}/H_{sp}$  dla różnych szerokości, od  $s=1$  do 500 m, dla  $h=10$  m i  $l=4000$  m. Wartości anomalii ekstremalnej są tu  $>0$  ponieważ zastosowano skalę logarytmiczną

Fig. 8. Anomaly of  $-A_{ext}$  in the function  $H_{st}/H_{sp}$  for different widths, from  $s=1$  to 500 m, for  $h=10$  m and  $l=4000$  m. The values of extreme anomaly are here  $>0$  because the logarithmic scale was used



Rys. 9. Wykres zależności współczynników  $C_6(s)$ ,  $C_7(s)$ ,  $C_8(s)$  funkcji liniowej i potęgowej od szerokości pustki  $s$

Fig. 9. Graph of dependence of coefficients  $C_6(s)$ ,  $C_7(s)$ ,  $C_8(s)$  of linear and power function on the width of void  $s$

a spodziewanym efektem grawitacyjnym identyfikowanym przez pomiary grawimetryczne w formie anomalii rozkładu siły ciężkości. Osiągnięto to w trybie badań modelowych z wykorzystaniem algorytmu Wójcickiego, który został przystosowany do badania wpływu pustek występujących na małych głębokościach. W tym celu opracowano program komputerowy ModGrav, który zapewnił możliwość parametryzacji zmiennych oraz zapewnił możliwość automatycznego wykonywania wielozadaniowych serii symulacji i gromadzenia wyników. Stanowiło to podstawę do sporządzenia odpowiednich wykresów w formie funkcji danych dyskretnych, które następnie aproksymowano, w celu znalezienia relacji pomiędzy badaną zmienną a efektem grawitacyjnym. Zastosowanie programu ModGrav było warunkiem koniecznym dla wykonywania tak skomplikowanych i licznych operacji obliczeniowych. W tej pracy prezentuje się tylko niewielką część wyników, która okazała się przydatna dla postawionego celu pracy. Otrzymane rezultaty badań pozwalają na sformułowanie następujących uwag i wniosków:

1. W badaniu wpływu czynników fizycznych, tj. gęstości w pustce wypełnionej mediami i gęstości otoczenia pustki stwierdzono, że wartości anomalii są wprost proporcjonalne do różnicy gęstości pustki i otoczenia, czyli zależność wartości rozkładu anomalii i „objętości” anomalii (całki zaburzenia) jest liniowa [7], [8].
2. W badaniu wpływu położenia stropu i spągu pustki na rozkład anomalii i anomalie ekstremalne stwierdzono, że wartości anomalii są wprost proporcjonalne do logarytmu stosunku  $H_{st}/H_{sp}$ . Uzyskanie funkcji [11] stanowi wartość poznawczą problemu.
3. Stwierdzono, że dla prostoliniowego wyrobiska chodnikowego o stałej wysokości i szerokości wartości anomalii i „objętości” anomalii są wprost proporcjonalne do szerokości wyrobiska [8], [9]. Dla głębokości mniejszych od 20m pojawiają się niewielkie odchylenia od liniowości tych funkcji. Uwzględnienie małych głębokości (poniżej 20 m) i dużych szerokości wyrobiska prowadzi do wyrażenia związków szerokości chodnika oraz położenia stropu i spągu w postaci funkcji podanych we wzorach [16].
4. Należy zaznaczyć, że otrzymane proste związki funkcyjne aproksymują tylko ściśle funkcje i dotyczą pustek o niewielkich wymiarach i znajdujących się na małych głębokościach (nie przekraczających znacząco 50m). Otrzymane rozwiązanie stanowić może podstawę weryfikacji tradycyjnie przeprowadzonej interpretacji wyników pomiarów grawimetrycznych. Następne badania powinny być skierowane na opracowanie w przyszłości programu do komputerowej analizy rozkładu obiektów zaburzających na drodze analizy odwrotnej.

## Literatura

1. *Bojdys G., Lemberger M.*: Modelowanie grawimetryczne jako metoda badania budowy litosfery na przykładzie Karpat, *Zeszyty Naukowe AGH 1073*, Kraków, 1986.
2. *Cady J. W.*: Calculation of gravity and magnetic anomalies of finite-length, right polygonal prisms, *Geophysics*, 45, 1980, 1507-1512.
3. *Fajkiewicz Z.*: Mikrogravimetria górnicza, Wyd. Śląsk, Katowice, 1980.
4. *Fajkiewicz Z.*: Grawimetria stosowana, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne, Kraków, 2007.
5. *Giunter N.M.*: Teoria potencjału, PWN, Warszawa.
6. *Gliński A.*: Podziemne wielopoziomowe zdjęcia mikrogravimetryczne i ich zastosowanie w badaniu budowy geologicznej górotworu, *Prace Geol. PAN*, 1978, 109.
7. *Grant F.S., West G.F.*: Interpretation theory in applied geophysics, Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1965.
8. *Haáz I.B.*: Relations between the potential of the attraction of the mass contained in a finite rectangular prism and its first and second derivatives, *Geofizikai Közlemenyek II*, 7, 1953.
9. *Hanemann K. D., Lindner D.*: Methodik zur Bestimmung der Streckenreduktion in der Untertagegravimetrie, *Neue Bergbautechnik*, 11, 1981, 271÷276.
10. *Hanemann K. D. and Militzer H.*: Ein neues Verfahren zur Streckenreduktion in der Untertagegravimetrie, *Tagungsbericht über das 3 Intern. Alpengravimetrie Kolloquium, Berichte über den Tiefbau der Ostalpen*, 1985.
11. *Hjelt S. E.*: The gravity anomaly of a dipping prism, *Geoplotation*, 12, 1974, 29÷39.
12. *Kolbenheyer T.*: Beitrag zur Theorie der Schwerewirkungen homogener prismatischer Körper, *Studia geoph. et geod. C.A.V.* 7, 1963, 233-239.
13. *Kolbenheyer T.*: Die Schwerewirkungen eines geraden Prismas mit rechtwinkligem Querschnitt, *Studia geoph. et geod. C.A.V.* 11, 1967, 262÷269.
14. *Nagy D.*: The Gravitational Attraction of a Right Rectangular Prism, *Geophysic* 31, 987, April 1966, pp. 362÷371
15. *Plouff D.*: Gravity and magnetic fields of polygonal prisms and application to magnetic terrain corrections, *Geophysics*, 41, 727÷741.
16. *Rösler R., Lindner H.*: Die Schweranomalie des geneigten dreidimensionalen Rechteckprismas, *Z. Geol. Wiss.*, 10, 1982, 1339-1345.
17. *Sorokin L.*: Grawimetria I rozpoznanie grawimetryczne, Warszawa, PPWK, 1956.
18. *Wójcicki A.*: A new approach to the calculation of gravity attraction of a homogeneous polyhedron, *Acta Geophysica Polonica*, 41, 2, 1993a 113÷140.
19. *Wójcicki A.*: Zastosowanie twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego w interpretacji grawimetrycznej, [Rozprawa Doktorska], Archiwum Wydziału GGiOŚ AGH w Krakowie, 1995.