

## 2. Rozkład Weibulla i jego zastosowanie w procesie optymalizacji kosztów eksploatacji elementów nienaprawialnych

ANDRZEJ CHMIELOWIEC<sup>1</sup>  
POLITECHNIKA RZESZOWSKA, ACHMIE@PRZ.EDU.PL

**Streszczenie** Pierwsze trzy części rozdziału zawierają wprowadzenie, podstawy teorii niezawodności oraz modelowania procesów starzenia elementów maszyn i urządzeń. Stanowią one wprowadzenie w tą tematykę i są uzupełnione obszerną bibliografią pozwalającą na zgłębienie przedstawionych w nich pojęć. W części czwartej zademonstrowano, w jaki sposób wiedza z zakresu niezawodności i starzenia elementów może być praktycznie wykorzystana w środowisku produkcyjnym. W czwartej części przedstawione zostały również numeryczne metody optymalizacji kosztów eksploatacji elementów nienaprawialnych, które mogą znaleźć zastosowanie w działach utrzymania ruchu firm produkcyjnych.

### 2.1. Wprowadzenie

Głównym zadaniem predykcyjnego utrzymania ruchu jest taka kontrola procesu produkcyjnego, która pozwala na wykrycie miejsca potencjalnej awarii jeszcze przed jej fizycznym wystąpieniem. Instalowanie różnego ro-

---

<sup>1</sup>ORCID: 0000-0001-6629-0029, Wydział Mechaniczno-Technologiczny Politechniki Rzeszowskiej, Kwiatkowskiego 4, 37-450 Stalowa Wola

dzaju czujników i systemów pomiarowych pozwala kontrolować parametry pracy urządzeń i w odpowiedni sposób reagować na ich zachowanie. W wielu sytuacjach dane przekazywane z czujników pozwalają obserwować proces powolnego zużywania się części eksploatacyjnych. Nadal jednak istnieje spora część elementów, których stan przydatności nie jest monitorowany i analizowany przez systemy informatyczne. Niezależnie jednak od tego, czy monitorujemy stan danego elementu, to charakteryzuje się on pewnym stopniem niezawodności, który maleje wraz z czasem eksploatacji. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka stanowią więc naturalną podstawę do modelowania tego rodzaju zjawisk. Dwudziesty wiek przyniósł ogromny wzrost zainteresowania wykorzystaniem modelowania statystycznego w organizacji produkcji. Począwszy od kart kontrolnych Shewarta [39], przez rozkłady czasu życia Weibulla [44], po niezawodność statystyczną [7] mamy do czynienia z bardzo intensywnym wykorzystywaniem tych działów matematyki. W kolejnych częściach tego rozdziału zostanie przybliżona statystyczna teoria niezawodności, rozkład Weibulla oraz jego zastosowania. Szczególna uwaga zostanie zwrócona na problem optymalizowania kosztów eksploatacji elementów nienaprawialnych.

## 2.2. Podstawy teorii niezawodności

Niezawodność w naukach inżynierskich oznacza zdolność pewnej maszyny, narzędzia lub pojedynczej części do realizowania zadań, które zostały dla niej określone. Z ilościowego punktu widzenia wyrażana jest najczęściej przy użyciu prawdopodobieństwa jako funkcji czasu. Z niezawodnością powiązane jest ściśle pojęcie jakości, czyli poziomu zgodności z jakim wykonanie wypełnia specyfikację projektową. W tym kontekście niezawodność możemy definiować, jako miarę jakości w funkcji czasu.

Kompletna teoria niezawodności, która swój rozwój zapoczątkowała niemal sto lat temu jest dzisiaj zbyt dużym działem wiedzy, aby można go było nawet w sposób pobieżny omówić w ramach jednego rozdziału. Dlatego też w tej części zostaną zaprezentowane jedynie podstawowe koncepcje tej teorii. Czytelnicy zainteresowani dokładniejszym poznaniem konkretnych problemów mogą skorzystać z bogatej literatury w tej dziedzinie:

- (2020) Probabilistic Reliability Analysis of Power Systems [42],
- (2020) Mechanical Reliability [15],
- (2020) Reliability Design of Mechanical Systems [45],

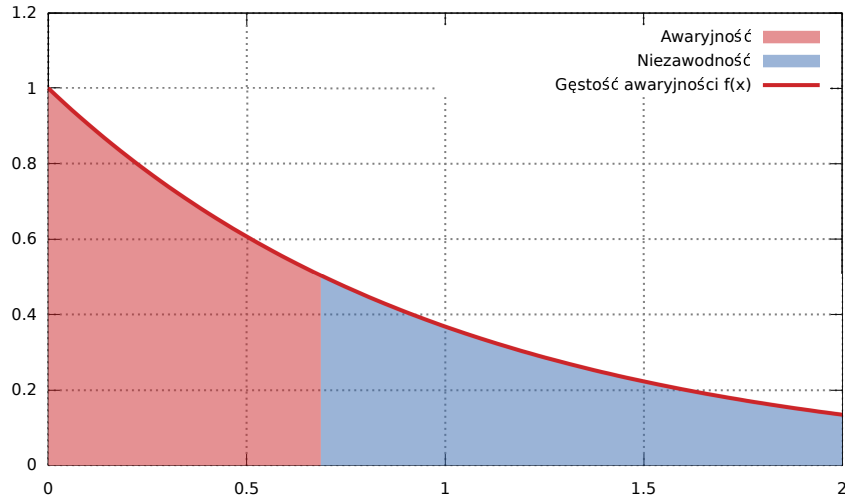
- (2017) Reliability Engineering [8],
- (2005) Modern Reliability Analysis: A Bayesian Perspective [19],
- (2000) Statistical Methods for the Reliability of Repairable Systems [37],
- (2000) Reliability Modeling, Prediction, and Optimization [9],
- (1998) Statistical Methods for Reliability Data [29],
- (1998) Reliability for Technology, Engineering and Management [20],
- (1988) Engineering Reliability [5],
- (1995) Applied Reliability [41],
- (1995) Reliability: Probabilistic Models and Statistical Methods [24],
- (1994) Practical Methods for Reliability Data Analysis [3],
- (1975) Statistitcal Theory of Reliability and Life Testing [6].

### 2.2.1. Rozkład czasu życia produktu w teorii niezawodności

Jak już zostało wspomniane, podstawowym narzędziem matematycznym do modelowania niezawodności jest rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Powiążmy teraz pojęcia matematyczne z podstawowymi definicjami teorii niezawodności. Przyjmijmy, że funkcja  $f(x)$  określa gęstość prawdopodobieństwa wystąpienia awarii – co oznacza, że całka  $\int_{t_1}^{t_2} f(x) dx$  definiuje prawdopodobieństwo wystąpienia awarii w czasie od  $t_1$  do  $t_2$ . Dla tak określonej funkcji gęstości *niezawodność* do momentu  $t$  definiujemy jako funkcję

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(x) dx, \quad (2.1)$$

czyli prawdopodobieństwo, że awaria nastąpi dopiero po pewnym czasie  $t$ . Jeżeli  $F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$  jest dystrybuantą rozkładu prawdopodobieństwa awarii (*awaryjność* do momentu  $t$ ), to niezawodność do momentu  $t$  możemy również wyrazić zależnością  $R(t) = 1 - F(t)$ . Geometryczną interpretację pojęcia awaryjności i niezawodności przedstawiono dla przykładowego rozkładu na Rysunku 2.1. Przypomnijmy także, że kwantyl rzędu  $p$  funkcji awaryjności  $F$ , to taka wartość zmiennej czasowej  $t_p$ , dla której



Rysunek 2.1: Funkcja gęstości awaryjności  $f(x) = e^{-x}$  (rozkład wykładniczy) wraz z oznaczoną interpretacją awaryjności i niezawodności.

zachodzi  $F(t_p) = p$  (prawdopodobieństwo awarii po czasie  $t_p$  wynosi  $p$ ). Bardzo często operuje się niezawodnością warunkową, która określa jakie jest prawdopodobieństwo bezawaryjnego działania produktu pod warunkiem, że przepracował on już  $t$  jednostek czasu. Jeżeli zatem  $R(t) > 0$ , to niezawodność warunkową w chwili  $s$  pod warunkiem bezawaryjnego funkcjonowania przez pierwszych  $t$  jednostek czasu definiujemy jako:

$$R(s|t) = \frac{R(t+s)}{R(t)}. \quad (2.2)$$

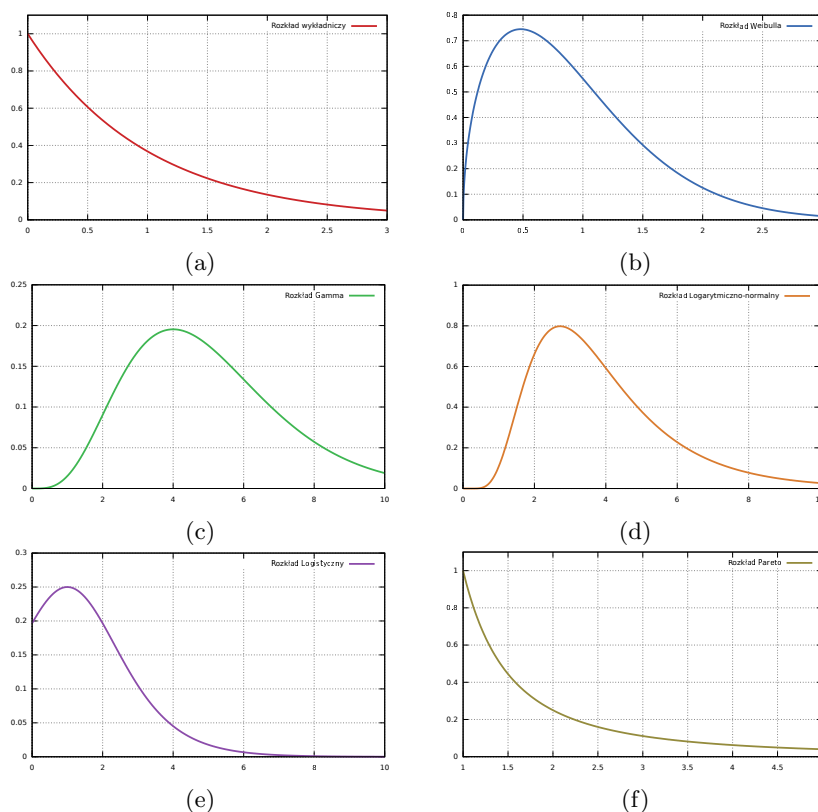
Szybkość zmian funkcji  $R(s|t)$  jest ważną miarą jakości produktu. W oparciu o nią definiowany jest bowiem tak zwany *współczynnik awaryjności*:

$$h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} \frac{R(t) - R(t+s)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}. \quad (2.3)$$

Na podstawie funkcji  $h(t)$  wyznaczyć można tak zwany *skumulowany współczynnik awaryjności* (zwany również *funkcją ryzyka*), który wyraża się wzorem  $H(t) = \int_0^t h(x) dx$ . Ma on wiele zastosowań ze względu na monotoniczny charakter i fakt, że jest ściśle powiązany z niezawodnością za pomocą tożsamości  $H(t) = -\log R(t)$ .

Statystyczna teoria niezawodności wykorzystuje wiele różnych rozkładów prawdopodobieństwa do modelowania zjawisk związanych z czasem

życia produktu. Znaczna część tych rozkładów ma swoje korzenie w określonych zjawiskach fizycznych. Jednym z najlepszych przykładów tego rodzaju jest rozkład Weibulla, który swoje podwaliny bierze w statystycznym modelowaniu siły zrywającej materiał [43]. Jego główna idea opiera się na założeniu, że cały łańcuch jest tak mocny, jak jego najsłabsze ogniwo. Więcej informacji o tym rozkładzie zostanie przedstawionych w kolejnej części, a tymczasem przejdźmy do prezentacji podstawowych rozkładów stosowanych w teorii niezawodności. W kolejnych punktach przez:  $f(t)$  oznaczana będzie gęstość rozkładu awaryjności,  $h(t)$  będzie funkcją współczynnika awaryjności,  $\mu$  będzie średnim czasem oczekiwania na awarię, a  $\sigma^2$  wariancją rozkładu awaryjności.



Rysunek 2.2: Przykładowe rozkłady: (a) rozkład wykładniczy  $\lambda = 1$ , (b) rozkład Weibulla  $\lambda = 1, k = 1.5$ , (c) rozkład Gamma  $\lambda = 1, r = 5$ , (d) rozkład logarytmiczno-normalny  $m = 1, s = 0.5$ , (e) rozkład logistyczny  $\lambda = 1, \beta = 1$ , (f) rozkład Pareto  $\lambda = 1, m = 1$ .

1. **Rozkład wykładniczy** (Rysunek 2.2 (a) – przykładowy rozkład dla parametru  $\lambda = 1$ )

$$\begin{aligned}f(t) &= \lambda e^{-\lambda t} \\h(t) &= \lambda \\ \mu &= \lambda^{-1} \\ \sigma^2 &= \lambda^{-2}\end{aligned}$$

gdzie  $t > 0, \lambda > 0$ .

2. **Rozkład Weibulla** (Rysunek 2.2 (b) – przykładowy rozkład dla parametrów  $\lambda = 1, k = 1.5$ )

$$\begin{aligned}f(t) &= \lambda k t^{k-1} e^{-\lambda t^k} \\h(t) &= \lambda k t^{k-1} \\ \mu &= \lambda^{-\frac{1}{k}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ \sigma^2 &= \lambda^{-\frac{2}{k}} \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right]\end{aligned}$$

gdzie  $t > 0, \lambda > 0, k > 0$ . Warto w tym miejscu podkreślić, że rozkład ten pojawia się w swojej alternatywnej postaci jako funkcja

$$f(t) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(t/\lambda)^k},$$

która powstaje przez proste mapowanie  $t \mapsto \lambda^{k+1}t$ .

3. **Rozkład Gamma** (Rysunek 2.2 (c) – przykładowy rozkład dla parametrów  $\lambda = 1, r = 5$ )

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} t^{r-1} e^{-\lambda t} \\h(t) &= \frac{\lambda^r t^{r-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(r)[1 - \Gamma_I(r, \lambda t)]} \\ \mu &= r \lambda^{-1} \\ \sigma^2 &= r \lambda^{-2}\end{aligned}$$

gdzie  $t > 0, \lambda > 0, r > 0$ , natomiast  $\Gamma_I$  jest niekompletną funkcją Gamma.

4. **Rozkład logarytmiczno-normalny** (Rysunek 2.2 (d) – przykładowy rozkład dla parametrów  $m = 1, s = 0.5$ )

$$f(t) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log t - m)^2}{2s^2}}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

$$\mu = e^{m + \frac{s^2}{2}}$$

$$\sigma^2 = e^{2m + 2s^2} - e^{2m + s^2}$$

gdzie  $t > 0, -\infty < m < \infty, s > 0$ . Zauważmy, że współczynnik awaryjności jest podany w formie definicji. Wynika to z faktu, że dla tego rozkładu nie można wyznaczyć współczynnika awaryjności w postaci zwartej formuły.

5. **Rozkład logistyczny** (Rysunek 2.2 (e) – przykładowy rozkład dla parametrów  $\lambda = 1, \beta = 1$ )

$$f(t) = \frac{e^{-(t-\lambda)/\beta}}{\beta (1 + e^{-(t-\lambda)/\beta})^2}$$

$$h(t) = \left[ \beta \left( 1 + e^{-(t-\lambda)/\beta} \right) \right]^{-1}$$

$$\mu = \lambda$$

$$\sigma^2 = (\beta\pi)^2/3$$

gdzie  $t > 0, -\infty < \lambda < \infty, \beta > 0$ .

6. **Rozkład Pareto** (Rysunek 2.2 (f) – przykładowy rozkład dla parametrów  $\lambda = 1, m = 1$ )

$$f(t) = \frac{m\lambda^m}{t^{m+1}}$$

$$h(t) = \frac{m}{t}$$

$$\mu = \frac{m\lambda}{m-1}$$

$$\sigma^2 = \frac{m\lambda^2}{(m-1)^2(m-2)}$$

gdzie  $t > \lambda, m > 0$ .

Jeżeli zawodność produktów może być faktycznie modelowana za pomocą przedstawionych powyżej rozkładów, to należy zadać sobie pytanie dlaczego tak rzadko nowe produkty ulegają awarii. Wynika to z faktu, że producent na ogół podczas kontroli jakości jest w stanie wykryć te egzemplarze, które są w pewnym stopniu wadliwe i ich oczekiwana żywotność będzie krótka. Innymi słowy zadaniem kontroli jakości jest wykrycie tych produktów, które mogą się zepsuć po zbyt krótkim okresie użytkowania. Często taka kontrola wiąże się z poddaniem produktu testom eksploatacyjnym w ekstremalnych warunkach np. temperatury, ciśnienia, obciążenia, itp.

W idealnej sytuacji znany jest rozkład awaryjności jaki powinien zostać zastosowany w przypadku konkretnego produktu. Taką wiedzę można na przykład pozyskać z literatury traktującej o procesach zużycia konkretnych elementów (np. mechanicznych, elektroniki, płynów roboczych, itp.). Jeżeli jednak taka wiedza o eksploatowanym przez nas produkcie jest niedostępna, to można próbować przybliżać rozkład awaryjności na podstawie danych historycznych. Wszystkie podzespoły zużywają się w pewien charakterystyczny dla siebie sposób, a dział utrzymania ruchu powinien gromadzić wiedzę na temat zaistniałych awarii. Na podstawie tego rodzaju danych można próbować znaleźć rozkład prawdopodobieństwa odpowiadający procesowi starzenia konkretnych elementów. Jedną z takich metod jest metoda największego prawdopodobieństwa. Polega ona na zebraniu czasów bezawaryjnego funkcjonowania określonego rodzaju elementów  $t_1, \dots, t_n$  oraz postawieniu hipotezy, że gęstość awaryjności powinna być zadana rozkładem  $f(t; \theta)$ . W tym przypadku przez  $\theta$  oznaczamy wszystkie parametry rozkładu  $f$ . Na podstawie zebranych danych historycznych tworzymy funkcje

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \theta) \quad (2.4)$$

i wyznaczamy wartość parametru  $\theta$ , dla którego funkcja  $L$  przyjmuje maksimum. Tego rodzaju optymalizacja jest dość prosta w przypadku rozkładów o jednowymiarowym parametrze  $\theta$ . Jednakże w przypadku wielowymiarowym konieczne na ogół jest zastosowanie odpowiednich metod numerycznych, które pozwolą na wyznaczenie maksimum. Osoby zainteresowane tą tematyką mogą sięgnąć po książkę [24], która w sposób precyzyjny wprowadza do problematyki wyznaczania parametrów rozkładu przy użyciu opisanej tutaj metody.



**Przykład 1.** Przyjmijmy, że awaryjność pewnego produktu ma rozkład wykładniczy  $f(t; \theta) = \theta e^{-\theta t}$  i zaobserwowane zostały awarie po czasie  $t_1, \dots, t_n$ . Wtedy funkcja maksymalizacji prawdopodobieństwa przyjmuje postać:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \theta e^{-\theta t_i}.$$

Zauważmy, że zamiast  $L(\theta)$  łatwiej jest maksymalizować funkcję

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \log(L(\theta)) \\ &= \log\left(\prod_{i=1}^n \theta e^{-\theta t_i}\right) \\ &= n \log \theta - \theta \sum_{i=1}^n t_i. \end{aligned}$$

Dla takiej funkcji można wykazać, że maksimum pojawia się w punkcie  $\hat{\theta} = 1/\bar{t}$ , gdzie  $\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$ . Zatem przybliżeniem parametru rozkładu jest odwrotność średniej arytmetycznej połączonych obserwacji.

Innym sposobem weryfikacji poprawności doboru rozkładu są tak zwane wykresy prawdopodobieństwa. Jest to niezwykle prosta i intuicyjna metoda, która polega na posortowaniu obserwacji i nanoszeniu ich na płaszczyznę w punktach określonych przez wybrany rozkład prawdopodobieństwa. Jeżeli podczas tej operacji punkty zaczną formować linię prostą, to będzie to oznaczało poprawność wyboru rozkładu. Metoda ta była kiedyś wykorzystywana ręcznie, ale w chwili obecnej do dyspozycji jest wiele programów, które wspierają tego rodzaju analizę (np. Matlab, Minitab, SPSS).

### 2.2.2. Niezawodność układów złożonych

W praktyce bardzo często mamy do czynienia nie z pojedynczymi elementami, a całymi systemami, których niezawodność należałoby szacować na podstawie niezawodności części składowych. Takie złożone systemy przedstawiane są zazwyczaj w formie schematów zależności pomiędzy poszczególnymi elementami, jak to zostało pokazane na Rysunku 2.3. Istnieją dwa podstawowe rodzaje połączenia współpracujących ze sobą elementów:

1. *Połączenie szeregowe* – awaria pojedynczego elementu powoduje awarię całego połączenia,

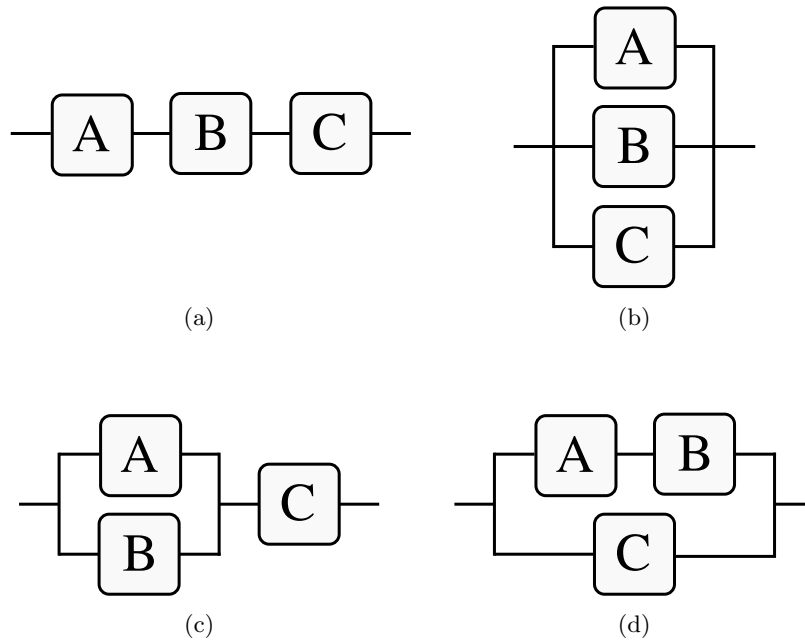
2. *Połączenia równoległe* – dopiero awaria wszystkich elementów powoduje awarię całego połączenia.

Jeżeli przyjąć, że  $p_1, \dots, p_n$  oznaczają prawdopodobieństwa awarii poszczególnych części systemu, to prawdopodobieństwo awarii systemu, w którym te części połączone są ze sobą szeregowo wyraża się wzorem

$$\Phi(p_1, \dots, p_n) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i). \quad (2.5)$$

Jeżeli natomiast poszczególne elementy połączone są ze sobą równoległe, to prawdopodobieństwo awarii systemu wyrażamy wzorem

$$\Psi(p_1, \dots, p_n) = \prod_{i=1}^n p_i. \quad (2.6)$$



Rysunek 2.3: Przykładowe zależności pomiędzy trzema elementami systemu: (a) szeregowo, (b) równoległe, (c, d) szeregowo-równoległe

**Przykład 2.** Jeśli przyjąć, że  $P_A, P_B$  i  $P_C$  oznaczają odpowiednio prawdopodobieństwo awarii elementów  $A, B$  i  $C$ , to można

wyznaczyć prawdopodobieństwa awarii systemów przedstawionych na Rysunku 2.3 w następujący sposób:

- (a) Połączenie szeregowe elementów  $A, B$  i  $C$  oznacza, że uszkodzenie jednego elementu powoduje awarię systemu, a zatem prawdopodobieństwo awarii wynosi

$$P_a = 1 - (1 - P_A)(1 - P_B)(1 - P_C)$$

- (b) Połączenie równoległe elementów  $A, B$  i  $C$  oznacza, że dopiero uszkodzenie wszystkich elementów powoduje awarię systemu, a zatem prawdopodobieństwo awarii wynosi

$$P_b = P_A \cdot P_B \cdot P_C$$

- (c) W tym przypadku elementy  $A, B$  połączone są ze sobą równoległe, co oznacza, że prawdopodobieństwo ich awarii wynosi  $P_{AB} = P_A \cdot P_B$ , a następnie całość połączona jest szeregowo z elementem  $C$ . Oznacza to, że awarię powoduje jednoczesne uszkodzenie elementów  $A$  i  $B$  lub elementu  $C$ . Zatem prawdopodobieństwo awarii systemu określa zależność

$$\begin{aligned} P_c &= 1 - (1 - P_{AB})(1 - P_C) \\ &= 1 - (1 - P_A \cdot P_B)(1 - P_C) \end{aligned}$$

- (d) Z kolei w tym przypadku elementy  $A, B$  połączone są ze sobą szeregowo, co oznacza, że prawdopodobieństwo ich awarii wynosi  $P_{AB} = 1 - (1 - P_A)(1 - P_B)$ , a następnie całość połączona jest równoległe z elementem  $C$ . Oznacza to, że awarię powoduje uszkodzenie elementów  $A$  lub  $B$  z jednoczesnym uszkodzeniem elementu  $C$ . Zatem prawdopodobieństwo awarii systemu określa zależność

$$\begin{aligned} P_c &= P_{AB} \cdot P_C \\ &= (1 - (1 - P_A \cdot P_B)) \cdot P_C \end{aligned}$$

Wprowadzone powyżej pojęcia stanowią wstęp do analizy niezawodności systemów złożonych. Osoby zainteresowane tą tematyką mogą sięgnąć po bogatą literaturę związaną z tego rodzaju zagadnieniami [45], [26], [42].

### 2.3. Rozkład Weibulla i jego zastosowania

Pod koniec lat 30-tych XX-wieku Weibull [43] wprowadził nowy rozkład prawdopodobieństwa, który miał zastosowanie w modelowaniu zjawiska siły zrywającej materiał. Następnie rozwinął swoją pracę i pokazał w jaki sposób wprowadzony przez niego rozkład może być zastosowany w szeregu innych aplikacji [44]. Jednakże faktycznie pierwsze publikacje dotyczące tego rozkładu można przypisać Fréchetowi [14] oraz Fisherowi i Tippettowi [12]. Niemniej jednak, to właśnie Weibull wprowadził do rozkładu parametr skali i położenia, przez co nadał mu bardzo duże znaczenie dla zastosowań praktycznych. Rozkład ten jest aktualnie jednym z najdokładniej zbadanych rozkładów, które reprezentują rodzinę tak zwanych rozkładów cyklu życia. Przez ostatnie czterdzieści lat powstało bardzo wiele publikacji dotyczących zarówno samego rozkładu, jak i jego praktycznych zastosowań. Należy podkreślić, że w bardzo wielu przypadkach rozkładu tego nie określano mianem rozkładu Weibulla, co prowadziło do wielu błędów i nieścisłości wynikających z braku jednolitej nomenklatury. Dobry obraz tego stanu rzeczy zaprezentował między innymi Hilinnan [16]. W książkach dotyczących statystyki, niezawodności i modelowania czasu życia można znaleźć całe rozdziały poświęcone właśnie rozkładowi Weibulla. Przykładem mogą być tu chociażby publikacje Johnsona [18] i Lai [22]. O obszerności problematyki związanej z zastosowaniami rozkładu Weibulla świadczy również fakt, że na jego temat powstają liczne monografie, jak chociażby Murthy'ego [31], Lai [23] i McPhersona [28].

Rozkład Weibulla definiuje następująca funkcja gęstości prawdopodobieństwa

$$f(t) = \lambda k t^{k-1} e^{-\lambda t^k}, \quad (2.7)$$

gdzie  $t \geq 0, \lambda > 0, k > 0$ . Przy czym  $\lambda$  nazywamy parametrem skali, a  $k$  parametrem kształtu. Często pojawia się też trzeci parametr, zwany parametrem lokalizacji. Nie został on uwzględniony, gdyż wpływa jedynie na przesunięcie wykresu gęstości prawdopodobieństwa na osi czasu. Dla określonej w ten sposób gęstości prawdopodobieństwa wystąpienia awarii możemy wyrazić awaryjność  $F$ , niezawodność  $R$ , współczynnik awaryjności  $h$ ,

wartość oczekiwaną  $\mu$  i wariancję  $\sigma^2$  za pomocą następujących formuł:

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 - e^{-\lambda t^k} \\ R(t) &= e^{-\lambda t^k} \\ h(t) &= \lambda k t^{k-1} \\ \mu &= \lambda^{-\frac{1}{k}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ \sigma^2 &= \lambda^{-\frac{2}{k}} \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right]. \end{aligned}$$

Alternatywną definicję funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla tego rozkładu można uzyskać wykonując podstawienie  $\lambda = \alpha^{-k}$ ,  $k = \beta$ . Zastosowanie powyższego podstawienia do równania (2.7) pozwala wyrazić funkcję gęstości prawdopodobieństwa awarii następującym wzorem

$$f(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-(t/\alpha)^\beta} \quad (2.8)$$

Dla tak przyjętych oznaczeń możemy wyznaczyć funkcję awaryjności  $F$  (dystrybuantę rozkładu o gęstości prawdopodobieństwa zadanej równaniem (2.8)), funkcję niezawodności  $G$  oraz współczynnik awaryjności  $h$  jako

$$F(t) = 1 - e^{-(t/\alpha)^\beta} \quad (2.9)$$

$$G(t) = e^{-(t/\alpha)^\beta} \quad (2.10)$$

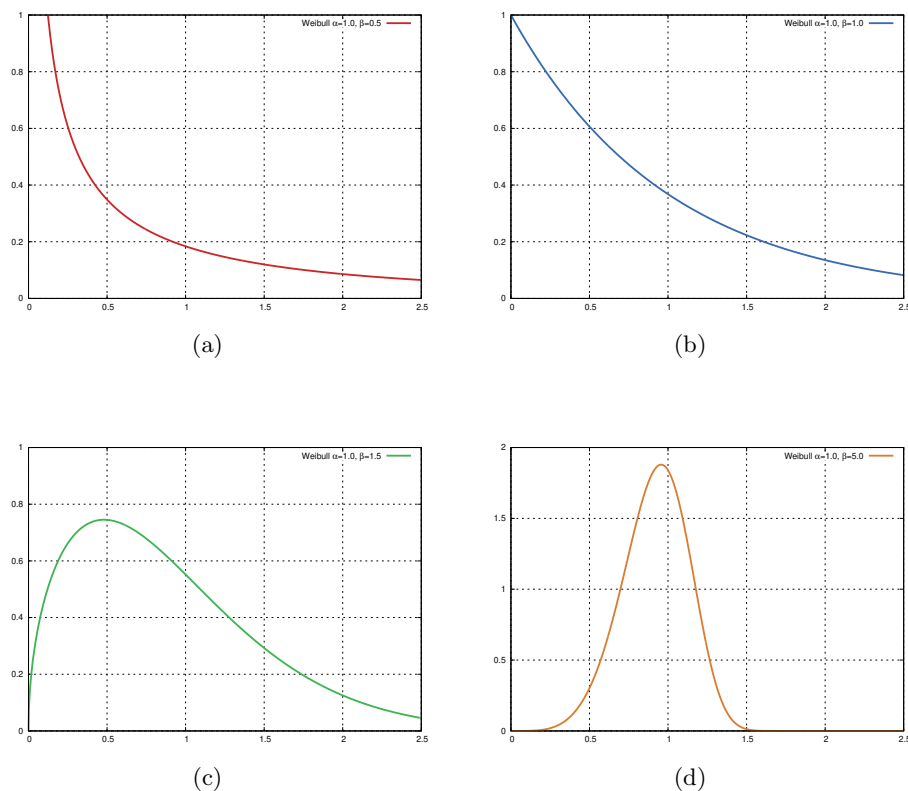
$$h(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}. \quad (2.11)$$

Ponadto wartość oczekiwana i wariancja wyrażają się wzorami

$$\mu = \alpha^{-1} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (2.12)$$

$$\sigma^2 = \alpha^{-2} \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]. \quad (2.13)$$

Na Rysunku 2.4 przedstawiono przykładowe wykresy funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla rozkładu Weibulla. Jak widać rodzina tych rozkładów obejmuje bardzo szerokie spektrum przypadków. Na przykład rozkład o parametrach  $\beta = 1$  i  $\alpha = 1$  jest rozkładem wykładniczym – typowym dla określenia awaryjności podzespołów elektronicznych. Z kolei rozkład o parametrach  $\beta = 5$  i  $\alpha = 1$  jest przykładem rozkładu, który



Rysunek 2.4: Przykładowe wykresy gęstości prawdopodobieństwa awarii dla rozkładu Weibulla o określonych parametrach: (a)  $\alpha = 1, \beta = 0.5$ , (b)  $\alpha = 1, \beta = 1.0$ , (c)  $\alpha = 1, \beta = 1.5$  i (d)  $\alpha = 1, \beta = 5.0$

z naszego punktu widzenia wydaje się być najbardziej interesujący – rozkładem prawdopodobieństwa awarii dla produktów starzejących się.

Więcej informacji na temat tego rozkładu i jego zastosowań można znaleźć w obszernej monografii dotyczącej zastosowań statystyki w naukach inżynierskich – Springer Handbook of Engineering Statistics [22].

### 2.3.1. Zastosowania i rozkłady pochodne

Szerokie zainteresowanie metodami statystycznymi w inżynierii sprawiło, że przez ostatnie 40 lat rozkład Weibulla został zastosowany w badaniu zużycia i niezawodności wielu materiałów i procesów technologicznych. Poniższe zestawienie to jedynie drobny wycinek tego, co obecnie można znaleźć w li-

teraturze na temat zastosowań rozkładu Weibulla. Niemniej jednak dobrze obrazuje wszechstronność tego rozkładu, jak również fakt, że do dnia dzisiejszego jest on bardzo często wykorzystywany do modelowania określonych zjawisk.

- (1939) Weibull [43] - granica plastyczności stali, trwałość zmęczeniowa stali,
- (1980) Keshevan i inni [21] - wytrzymałość szkła na pękanie,
- (1990) Sheikh i inni [38] - korozja wżerowa rur,
- (1997) Queeshi i Sheikh [36] - zużycie adhezyjne metali,
- (1997) Durham i Padget [11] - awaryjność kompozytów z włókna węglowego,
- (1999) Almeida [2] - awaryjność powłok,
- (2001) Fok i inni [13] - awaryjność materiałów kruchych,
- (2002) Newell i inni [35] - awaryjność materiałów kompozytowych,
- (2003) Li i inni [25] - zużycie elementów betonowych,
- (2012) Hemphill i inni [17] - trwałość zmęczeniowa stopów aluminium o wysokiej entropii,
- (2018) Aigner i inni [1] - trwałość zmęczeniowa odlewów Al-Si,
- (2018) Bokde i inni [10] - modelowanie krzywej mocy turbiny wiatrowej,
- (2018) Sia i inni [40] - wytrzymałość materiałów wykorzystujących włókno bananowca,
- (2020) Xie i inni [46] - wytrzymałość włókien z tereftalanu polietylenu,
- (2020) Bai i inni [4] - awaryjność złączy pod wpływem ścinania.

Tak duży przekrój zastosowań związany jest również z wprowadzaniem pewnych modyfikacji do rozkładu Weibulla, które nazywamy *modelami pochodnymi*. Bardzo dobrą klasyfikację tych modeli podał Murthy [31], który podzielił je na siedem typów, z których każdy dzieli się jeszcze na kilka podgrup. Te siedem typów można podzielić na trzy główne rodzaje:

1. modele jednej zmiennej (typy I – V),
2. modele wielu zmiennych (typ VI),
3. modele procesów stochastycznych (typ VII).

Szczegółowy opis wszystkich typów rozkładu Weibulla zostanie w tym miejscu pominięty. Czytelnik dokładniej zainteresowany tym zagadnieniem może sięgnąć do rozdziału trzeciego monografii Springer Handbook of Engineering Statistics, w którym Lai, Murthy i Xie [22], w sposób bardzo kompaktowy przedstawiają najważniejsze rozkłady pochodne dla jednej zmiennej i procesów stochastycznych. Jeżeli natomiast chodzi o modele dla wielu zmiennych, to warto przestudiować rozdział piąty tej samej monografii, gdzie Murthy, Baik, Wilson i Bulmer [30] przedstawili je na przykładzie rozkładów z dwiema zmiennymi.

### 2.3.2. Wybór modelu i estymacja parametrów

Ze względu na dużą różnorodność modeli pochodnych, wybór właściwego typu rozkładu nie jest rzeczą prostą. Można zauważyć, że w pracach naukowych obowiązują dwa zasadnicze podejścia:

1. modelowanie bazujące na podstawach teoretycznych – tworzenie/dobieranie modelu w oparciu o zbadane i potwierdzone własności fizyczne i mechaniczne,
2. modelowanie doświadczalne – dobieranie modelu stosownie do uzyskanych danych pomiarowych.

Z czysto inżynierskiego i praktycznego punktu widzenia drugie podejście jest dużo mniej czasochłonne. Jego główną zaletą jest przede wszystkim brak konieczności wnikliwego badania zjawisk fizycznych rządzących zużyciem i awaryjnością określonych maszyn, podzespołów i procesów. Jednakże sprawdzi się ono jedynie wtedy, gdy dysponujemy odpowiednio dużą liczbą pomiarów, które pozwolą na określenie modelu i jego parametrów. Proces ten możemy podzielić na trzy etapy:

1. wybór modelu (określenie rozkładu prawdopodobieństwa, który powinien dobrze odzwierciedlać sytuację, w której jest stosowany – można na przykład posłużyć się opublikowanymi wynikami badań i adoptować je do swojego przypadku),
2. estymacja parametrów dla wybranego modelu (wykorzystanie danych pomiarowych do wyznaczenia parametrów wybranego rozkładu),



3. weryfikacja modelu (wykonanie na przykład testów statystycznych pozwalających przyjąć bądź odrzucić hipotezę, co do trafności dopasowania modelu do posiadanych wyników pomiarowych).

Najtrudniejszym etapem w powyższym procesie jest wybór odpowiedniego modelu. Zazwyczaj realizowany jest on metodą prób i błędów, póki nie otrzymamy zadowalającego wyniku podczas weryfikacji. Odpowiednie dopasowanie wyników eksperymentalnych do typu rozkładu jest elementem niezbyt dobrze zbadanym. Rozważania na ten temat prowadzili między innymi Liao i Shimokawa [27], którzy przedstawili procedury pozwalające *dobrze dopasować* wyniki pomiarów do rozkładu Weibulla. Do realizacji dwóch pozostałych etapów tego procesu mamy do dyspozycji wiele narzędzi, które dostępne są zarówno w programach statystycznych, jak i w arkuszach kalkulacyjnych. Ze wszystkich tych narzędzi na szczególną uwagę zasługuje metoda wykresów prawdopodobieństwa dla rozkładu Weibulla, która została wprowadzona przez Nelsona i Thompsona [34], a następnie była rozwijana [32], [33]. Jej ogromną wartością jest to, że w sposób graficzny i bardzo intuicyjny pokazuje w jaki sposób parametry rozkładu wpisują się w zbiór danych pomiarowych. Jej działanie zostanie przedstawiona na przykładzie.

**Przykład 3.** Załóżmy, że dysponujemy zbiorem danych pomiarowych, który reprezentuje czas eksploatacji danej maszyny, podzespołu lub procesu. Dane te sortujemy rosnąco, tak jak to zostało przedstawione w Tabelicy 2.1 i oznaczamy przez  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ . Jeżeli teraz potraktować  $t_i$  jako argumenty i przypisać im kolejne, równoodległe wartości z przedziału  $[0, 1]$ , to intuicja podpowiada nam, że na wykresie powinny pojawić się punkty przybliżające dystrybuantę rozkładu prawdopodobieństwa. Idea wykresów prawdopodobieństwa dla rozkładu Weibulla sięga jednak nieco dalej i wykorzystując funkcję logarytmiczną dąży do uzyskania liniowej zależności pomiędzy obiema współrzędnymi. Zanim jednak do tego przejdziemy zauważmy, że w powszechnym użyciu są generalnie dwa sposoby przypisywania prawdopodobieństw posortowanemu ciągowi argumentów:

1.  $\hat{F}(t_i) = \frac{i}{n+1}$  – estymator średniej,
2.  $\hat{F}(t_i) = \frac{i-0.5}{n}$  – estymator mediany.

W tym konkretnym przykładzie wykorzystany zostanie estymator mediany. Dwukrotnie zlogarytmowanie dystrybuanty roz-

Tablica 2.1: Przykładowy zbiór danych reprezentujący czas do awarii ( $t_i$ ) dla pewnego elementu eksploatacyjnego

| $i$ | $t_i$ | $i$ | $t_i$ | $i$ | $t_i$ |
|-----|-------|-----|-------|-----|-------|
| 1   | 0.01  | 11  | 0.14  | 21  | 0.54  |
| 2   | 0.02  | 12  | 0.17  | 22  | 0.64  |
| 3   | 0.02  | 13  | 0.18  | 23  | 0.65  |
| 4   | 0.06  | 14  | 0.19  | 24  | 0.70  |
| 5   | 0.08  | 15  | 0.29  | 25  | 0.79  |
| 6   | 0.09  | 16  | 0.31  | 26  | 0.81  |
| 7   | 0.09  | 17  | 0.31  | 27  | 1.18  |
| 8   | 0.10  | 18  | 0.34  | 28  | 1.20  |
| 9   | 0.13  | 19  | 0.38  | 29  | 1.46  |
| 10  | 0.14  | 20  | 0.48  | 30  | 2.45  |

kładu Weibulla (2.9) prowadzi do następującej zależności

$$\ln[-\ln[1 - F(t)]] = \beta \ln(t) - \beta \ln \alpha. \quad (2.14)$$

Przyjmując dla osi rzędnych  $y = \ln[-\ln[1 - F(t)]]$ , a dla osi odciętych  $x = \ln(t)$  otrzymujemy zależność liniową

$$y = \beta x - \beta \ln \alpha. \quad (2.15)$$

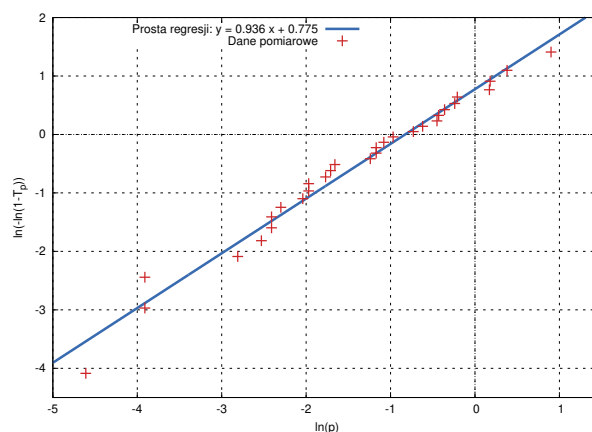
Dla naszego konkretnego przypadku wartości  $x$  i  $y$  dla pierwszych 5 pomiarów umieszczono w Tablicy 2.2. Punkty dla wszystkich 30 wartości zostały natomiast umieszczone na Rysunku 2.5. Można zauważyć, że punkty umieszczone na wykresie wyraźnie skupione są w pobliżu prostej. Oznacza to, że z bardzo dużym prawdopodobieństwem ich rozkład będzie odpowiadał pewnemu rozkładowi Weibulla. Stosując metodę najmniejszych kwadratów możemy na przykład wyznaczyć równanie prostej regresji, które w tym konkretnym przypadku ma postać

$$y = A \cdot x + B = 0.936 \cdot x + 0.775$$

Wykorzystując równanie (2.15) możemy zatem wyznaczyć współczynniki rozkładu Weibulla, które najlepiej dopasowują

Tablica 2.2: Wartości  $x = \ln(t_i)$  i  $y = \ln[-\ln[1 - \hat{F}(t_i)]]$  wyznaczone dla pierwszych 5 pomiarów z przykładowego zbioru danych

| $i$ | $t_i$ | $\hat{F}(t_i)$ | $x = \ln(t_i)$ | $y = \ln[-\ln[1 - \hat{F}(t_i)]]$ |
|-----|-------|----------------|----------------|-----------------------------------|
| 1   | 0.01  | 0.02           | -4.61          | -4.09                             |
| 2   | 0.02  | 0.05           | -3.91          | -2.97                             |
| 3   | 0.02  | 0.08           | -3.91          | -2.44                             |
| 4   | 0.06  | 0.12           | -2.81          | -2.09                             |
| 5   | 0.08  | 0.15           | -2.53          | -1.82                             |



Rysunek 2.5: Przykład zastosowania metody wykresów prawdopodobieństwa dla funkcji Weibulla

rozkład do uzyskanych wyników pomiarowych. Dzięki temu otrzymujemy ostatecznie

$$\alpha = e^{-B/A} = e^{-0.775/0.936} = 0.437$$

$$\beta = A = 0.936.$$

Ponieważ współczynnik  $\beta$  jest bliski jedności, to możemy wnioskować, że w tym konkretnym przypadku rozkład jest zbliżony do rozkładu wykładniczego.

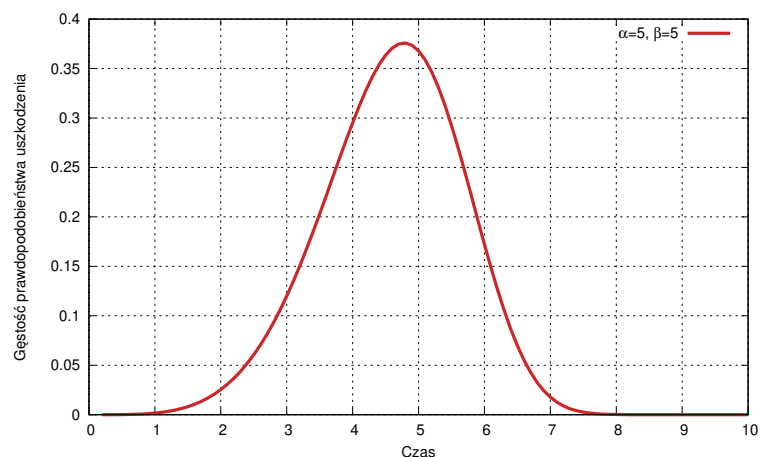
Jak już zostało wcześniej wspomniane, metoda wykresów prawdopodobieństwa dla rozkładu Weibulla, jest tylko jedną z metod pozwalających na wyznaczenie parametrów i weryfikację czy jest to w ogóle rozkład tego typu.

Niemniej jednak jest to metoda niezwykle intuicyjna, która w sposób obrazowy pokazuje zależność pomiędzy danymi pomiarowymi, a rozkładem Weibulla.

## 2.4. Optymalizacja kosztów eksploatacji z wykorzystaniem rozkładu Weibulla

Mimo instalacji coraz większej liczby czujników i monitorowania stopnia zużycia wielu systemów i ich podzespołów, nadal istnieje spora liczba elementów, których stan przydatności określamy w sposób binarny – sprawny/niesprawny. Za przykład niech tutaj posłuży wężyk olejowy, w przypadku którego nie można na bieżąco określać poziomu sprawności. Być może w przyszłości zaawansowane systemy wizyjne będą w stanie automatycznie wykrywać mikropęknięcia na jego powierzchni i śledzić poziom zużycia. Obecnie jednak działanie w takich przypadkach jest czysto reakcyjne. Wymiana dokonywana jest w ściśle określonym momencie lub usuwana jest awaria, gdy się pojawi. Z punktu widzenia osób zajmujących się utrzymaniem ruchu jest to mało komfortowa sytuacja. Należy jednak zauważyć, że dla każdego takiego elementu znajdującego się na linii produkcyjnej można ustalić optymalny czas jego pracy. Przez optymalny należy tutaj rozumieć czas, który minimalizuje koszty obsługi serwisowej. Intuicja podpowiada, że jeśli usunięcie awarii jest dużo droższe od wymiany planowej, to standardowy czas pracy takiego elementu powinien być krótszy niż w sytuacji, gdy koszty usunięcia awarii i planowej wymiany są zbliżone. Powstaje jednak pytanie: w jakim momencie dokonywać wymiany, aby długofalowe koszty były jak najniższe? Ten właśnie problem będzie rozważany w niniejszej części.

Rozważmy rozkład Weibulla przedstawiony na Rysunku 2.6, którego parametry rozkładu wynoszą odpowiednio  $\alpha = \beta = 5$ . Rozkład ten został wybrany jako przykład ilustrujący niezawodność elementów starzejących się. W praktyce dla każdego elementu należy oszacować parametry  $\alpha$  i  $\beta$  na podstawie danych historycznych (co zostało zaprezentowane w poprzedniej części) lub informacji pochodzących od producenta. Można wyliczyć, że średni czas życia produktu dla rozkładu o tych parametrach wynosi około 4.6 jednostki czasu (dla naszych rozważań precyzyjne ustalenie jaka jest to jednostka czasu nie ma kompletnie żadnego znaczenia, niemniej jednak czytelnik może dla ustalenia uwagi przyjąć, że są to na przykład miesiące). Z wykresu można wywnioskować, że systematyczna wymiana



Rysunek 2.6: Wykres gęstości prawdopodobieństwa dla rozkładu Weibulla o wartości parametrów  $\alpha = 5$  i  $\beta = 5$ .

takiego elementu co jedną jednostkę czasu praktycznie eliminuje problem wystąpienia awarii. W związku z tym producent może zalecać użytkownikom regularną wymianę właśnie co taki konkretnie okres czasu. Powstaje jednak pytanie, czy takie podejście jest uzasadnione ekonomicznie? Niestety nie ma jednoznacznej odpowiedzi na tak postawiony problem. Rozwiązanie zależy bowiem od tego jaki jest koszt wymiany tego elementu podczas standardowych czynności serwisowych, a jaki jest koszt wymiany w przypadku awarii. Należy w tym miejscu podkreślić, że zarówno do kosztu wymiany serwisowej, jak i do kosztu wymiany podczas awarii należy doliczyć koszty związane z przestojem. Jest to bardzo istotny element, który może sprawić, że ten sam element wykorzystany w różnych miejscach linii produkcyjnej będzie potraktowany odmiennie. Jako koszt można traktować tak naprawę dowolny ograniczony zasób, którym dysponuje przedsiębiorstwo, a który ma jakąkolwiek wartość. Może to być czas, pieniądze, energia, itd. W zasadzie przez koszt należy rozumieć wszelkie konieczne zasoby, które są zużywane podczas wymiany (zarówno wymiany serwisowej, jak i wymiany w przypadku awarii).

Rozważmy problem optymalnego doboru czasu wymiany w sposób bardziej formalny. Załóżmy, że znane są koszty usunięcia awarii danego ele-

mentu  $c_A$  oraz koszty planowej wymiany serwisowej  $c_S$ . Niech ponadto będzie dana wartość  $a = c_A/c_S$ . Załóżmy teraz, że prowadzone są regularne wymiany serwisowe tego elementu po dokładnie  $T$  jednostkach czasu, który upłynął od poprzedniej wymiany. W takim przypadku możemy zdefiniować gęstość prawdopodobieństwa wymiany elementu w określonej chwili czasu  $t$  jako funkcję

$$f_T(t) = \begin{cases} e^{-(t/\alpha)^\beta} \delta_T(t) & t = T, \\ \frac{k}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-(t/\alpha)^\beta} & 0 \leq t < T, \\ 0 & t < 0 \text{ i } t > T, \end{cases} \quad (2.16)$$

gdzie  $\delta_T(t)$  jest funkcją delta Diraca. Dystrybuanta określonego w ten sposób rozkładu prawdopodobieństwa ma postać

$$F_T(t) = \begin{cases} e^{-(t/\alpha)^\beta} & t = T, \\ 1 - e^{-(t/\alpha)^\beta} & 0 \leq t < T, \\ 0 & t < 0 \text{ i } t > T. \end{cases} \quad (2.17)$$

Na podstawie funkcji  $F_T$  jesteśmy w stanie oszacować oczekiwany koszt działań serwisowych dla zadanego czasu wymiany  $T$  jako

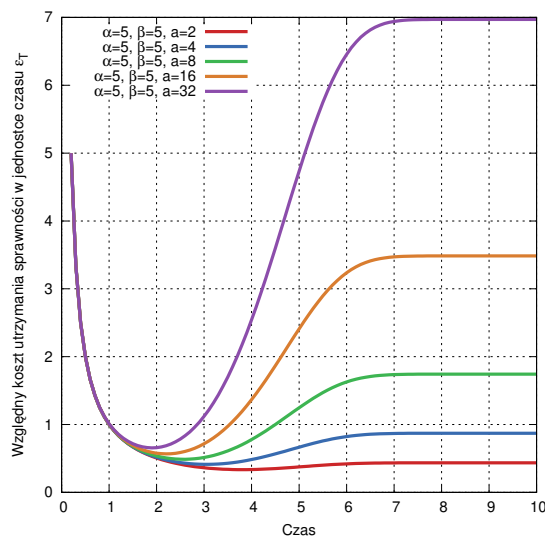
$$c_T = c_A \left(1 - e^{-(T/\alpha)^\beta}\right) + c_S e^{-(T/\alpha)^\beta}. \quad (2.18)$$

W powyższym wzorze koszt  $c_T$  jest po prostu średnią ważoną kosztu awarii  $c_A$ , który pojawia się z prawdopodobieństwem  $1 - e^{-(T/\alpha)^\beta}$  i kosztu naprawy serwisowej  $c_S$ , który pojawia się z prawdopodobieństwem  $e^{-(T/\alpha)^\beta}$ . Jeżeli wziąć pod uwagę warunek, że  $c_A = a \cdot c_S$ , to otrzymamy następującą równość

$$c_T = c_S \left(a - (a - 1)e^{-(T/\alpha)^\beta}\right). \quad (2.19)$$

Wyznaczony koszt nie jest jednak jeszcze tym, co tak naprawę jest poszukiwane. Jasnym jest bowiem, że nie uwzględnia on jeszcze częstości z jaką takie zmiany muszą być dokonywane. Bez trudu można sobie bowiem wyobrazić sytuację, w której średni koszt  $c_T$  jest niewielki, ale częstotliwość z jaką jest ponoszony tak duża, że nie jest to rozwiązanie optymalne. Niech zatem  $\mu_T$  oznacza średni czas pomiędzy wymianami danego elementu zarówno ze względu na awarię, jak i ze względu na planowaną wymianę serwisową. Wtedy wartość  $\mu_T^{-1}$  określa częstotliwość wymiany elementu i pozwala na zdefiniowanie funkcji  $\varepsilon_T$  określającej względny koszt utrzymania sprawności elementu w jednostce czasu

$$\varepsilon_T = \frac{c_T}{c_S} \cdot \mu_T^{-1}. \quad (2.20)$$



Rysunek 2.7: Wykresy funkcji względnego kosztu utrzymania sprawności w jednostce czasu  $\varepsilon_T$  dla przykładowych wartości parametru  $a$ .

To właśnie minimalizacja funkcji  $\varepsilon_T$  jest naszym głównym zadaniem. Aby ten cel zrealizować konieczne jest określenie wzoru na oczekiwany czas wymiany  $\mu_T$ , który dany jest za pomocą następującej zależności

$$\mu_T = \int_0^T t f_T(t) dt. \quad (2.21)$$

Niestety postać określonej wcześniej funkcji gęstości nie pozwala rozwiązać tej całki w sposób analityczny dla dowolnej wartości  $\beta$ . W związku z tym funkcja  $\varepsilon_T$  określająca względny koszt utrzymania sprawności w jednostce czasu wyraża się w następujący sposób

$$\varepsilon_T = \frac{a - (a - 1)e^{-(T/\alpha)^\beta}}{\int_0^T t f_T(t) dt}. \quad (2.22)$$

Wykresy funkcji  $\varepsilon_T$  dla kilku przykładowych wartości  $a$  przedstawiono na Rysunku 2.7. Z wykresów tych widać, że funkcja względnego kosztu utrzymania sprawności przyjmuje swoje minimum tym wcześniej im większa jest wartość współczynnika  $a$ . Jest to zgodne z intuicją, która podpowiada, że im wyższy jest koszt awarii w porównaniu do kosztu wymiany serwisowej, tym krócej powinien być użytkowany dany element. Jeśli koszt usunięcia

Tablica 2.3: Czasy wymiany, które minimalizują względny koszt utrzymania sprawności urządzenia dla określonych wartości  $a$ .

| $a$ | $\alpha$ | $\beta$ | Czas wymiany minimalizujący koszty utrzymania |
|-----|----------|---------|---|
| 2   | 5        | 5       | 3.80  |
| 4   | 5        | 5       | 3.05  |
| 8   | 5        | 5       | 2.57  |
| 16  | 5        | 5       | 2.21  |
| 32  | 5        | 5       | 1.91  |

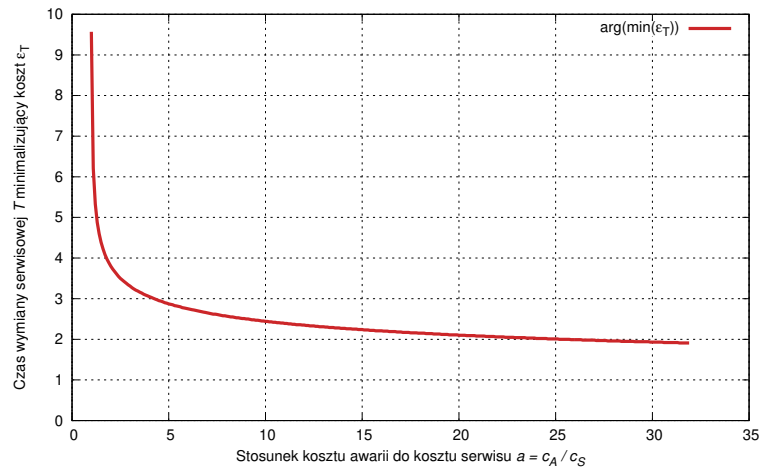
awarii jest dwa razy wyższy niż koszt obsługi serwisowej, to element powinien być wymieniony po 3.8 jednostkach czasu. Z kolei gdy koszt usunięcia awarii przekracza czterokrotnie koszt regularnego serwisu, to element powinien być wymieniany po 3.05 jednostkach czasu. Zestawienie wszystkich wartości dla wspomnianego wykresu umieszczono w Tablicy 2.3.

Na Rysunku 2.8 przedstawiono w jaki sposób powinien zmieniać się maksymalny czas użytkowania danego elementu jeżeli rosną względne koszty awarii. Przedstawione powyżej rozważania nie mają charakteru ogólnego, gdyż dotyczyły rozkładu Weibulla o parametrach  $\alpha = 5$  i  $\beta = 5$ . Jeżeli proces starzenia danego elementu przybliżony jest rozkładem Weibulla o innych wartościach tych parametrów, to całą analizę należy wykonać ponownie dla zmodyfikowanych danych. Jeśli w przedsiębiorstwie mamy do czynienia z wieloma elementami tego rodzaju, to można zastanawiać się nad stworzeniem narzędzi, które pozwoliłyby zautomatyzować ten proces.

## 2.5. Podsumowanie

W rozdziale tym przedstawione zostały podstawy teorii niezawodności i metody modelowania zużycia maszyn oraz ich elementów. Obie te dziedziny wiedzy są dzisiaj obszernie opisane w literaturze. Dlatego też zadaniem części 2 i 3 tego rozdziału było wprowadzenie do wspomnianej tematyki i wskazanie materiałów źródłowych, które pozwolą zainteresowanym czytelnikom na dokładniejsze zbadanie konkretnych tematów. Główny cel niniejszego rozdziału został przedstawiony w części 4, gdzie za pomocą wprowadzonych pojęć poddano analizie problem optymalizacji kosztów eksploatacji elemen-





Rysunek 2.8: Wykresy wartości  $T$  minimalizujących względny koszt utrzymania sprawności w jednostce czasu  $\epsilon_T$  dla zadanych wartości parametru  $a$ .

tów nienaprawialnych. Pokazano, że statystyczne modelowanie zjawisk starzenia się oraz awaryjności może być w sposób efektywny wykorzystane do numerycznej optymalizacji okresów serwisowania poszczególnych elementów. Zaprezentowane metody pokazują jak przy użyciu arkusza kalkulacyjnego możemy wyznaczyć parametry rozkładu reprezentującego proces starzenia się danego elementu oraz w jaki sposób wykorzystać te informacje w procesie optymalnego planowania przeglądów serwisowych. Należy też zauważyć, że opisane w tym rozdziale metody mogą być relatywnie prosto zintegrowane z systemami MES (Manufacturing Execution System) i CMMS (Computerised Maintenance Management System) uzupełniając obraz systemu utrzymania ruchu.

## Bibliografia

- [1] R. Aigner, M. Leitner, M. Stoschka. Fatigue strength characterization of Al-Si cast material incorporating statistical size effect. G. Henaff, redaktor, *12th International Fatigue Congress (FATIGUE 2018)*, wolumen 165 serii *MATEC Web of Conferences*, 2018.

- [2] J.B. Almeida. Application of Weibull statistics to the failure of coatings. *Journal of Materials Processing Technology*, 93:257–263, 1999.
- [3] J.I. Ansell, M.J. Phillips. *Practical Methods for Reliability Data Analysis*. Oxford University Press, Oxford, 1994.
- [4] Y.-L. Bai, Z.-W. Yan, T. Ozbakkaloglu, Q. Han, J.-G. Dai, D.-J. Zhu. Quasi-static and dynamic tensile properties of large-rupture-strain (LRS) polyethylene terephthalate fiber bundle. *Construction and Building Materials*, 232, 2020.
- [5] R.E. Barlow. *Engineering Reliability*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Alexandria, 1998.
- [6] R.E. Barlow, F. Proschan. *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. Holt, Rinehart, Austin, 1975.
- [7] Z.W. Birnbaum, S.C. Saunders. A new family of life distributions. *Journal of Applied Probability*, 6(2):319–327, 1969.
- [8] A. Birolini. *Reliability Engineering*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2017.
- [9] W.R. Blischke, D.N.P. Murthy. *Reliability Modeling, Prediction, and Optimization*. Wiley, New York, 2000.
- [10] N. Bokde, A. Feijoo, D. Villanueva. Wind Turbine Power Curves Based on the Weibull Cumulative Distribution Function. *Applied Sciences-Basel*, 8(10), 2018.
- [11] S.D. Durham, W.J. Padgett. Cumulative damage model for system failure with application to carbon fibers and composites. *Technometrics*, 39:34–44, 1997.
- [12] R.A. Fisher, L.M.C. Tippett. Limiting forms of frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24:180–190, 1928.
- [13] S.L. Fok, B.C. Mitchell, J. Smart, B.J. Marsden. A numerical study on the application of the Weibull theory to brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 68:1171–1179, 2001.
- [14] M. Fréchet. Sur la loi de probabilité de l'écart maximum. *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*, 6:93–116, 1927.

- 
- [15] O. Grynchenko, O. Alfyorov. *Mechanical Reliability*. Springer, Cham, 2020.
- [16] A.J.Jr. Hallinan. A review of the Weibull distribution. *Journal of Quality Technology*, 25:85–93, 1993.
- [17] M.A. Hemphill, T. Yuan, G.Y. Wang, J.W. Yeh, C.W. Tsai, A. Chuang, P.K. Liaw. Fatigue behavior of Al<sub>0.5</sub>CoCrCuFeNi high entropy alloys. *Acta Materialia*, 60(16):5723–5734, 2012.
- [18] N.L. Johnson, S. Kotz, N. Balakrishnan. *Continuous Univariate Distributions*, wolumen 1. Wiley, New York, 1994.
- [19] V.E. Johnson, M. Hamada, H. Martz, S. Reese, A. Wilson. *Modern Reliability Analysis: A Bayesian Perspective*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005.
- [20] P. Kales. *Reliability for Technology, Engineering and Management*. Prentice-Hall, Englewood, 1998.
- [21] K. Keshevan, G. Sargent, H. Conrad. Statistical analysis of the Hertzian fracture of pyrex glass using the Weibull distribution function. *Journal of Materials Science*, 15:839–844, 1980.
- [22] C. Lai, D.N. Murthy, M. Xie. *Weibull Distributions and Their Applications*, strony 63–78. Springer London, London, 2006.
- [23] C.-D. Lai. *Generalized Weibull Distributions*. Springer, Heidelberg, 2014.
- [24] L. Leemis. *Reliability: Probabilistic Models and Statistical Methods*. Prentice Hall, Englewood, 1995.
- [25] Q.S. Li, J.Q. Fang, D.K. Liu, J. Tang. Failure probability prediction of concrete components. *Cement and Concrete Research*, 33:1631–1636, 2003.
- [26] W. Li, H. Pham. *Statistical Maintenance Modeling for Complex Systems*, strony 807–833. Springer London, London, 2006.
- [27] M. Liao, T. Shimokawa. A new goodness-of-fit test for Type-I extreme-value, 2-parameter Weibull distributions with estimated parameters. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 64:23–48, 1999.

- [28] J.W. McPherson. *Reliability Physics and Engineering: Time-To-Failure Modeling*. Springer, Cham, 2019.
- [29] W.Q. Meeker, L.A. Escobar. *Statistical Methods for Reliability Data*. Wiley, New York, 1998.
- [30] D.N.P. Murthy, J. Baik, R.J. Wilson, M. Bulmer. *Two-dimensional modelling of failures*. Springer London, London, 2006.
- [31] D.N.P. Murthy, M. Xie, R. Jiang. *Weibull Models*. Wiley, New York, 2003.
- [32] W. Nelson. Theory and application of hazard plotting for censored failure data. *Journal of Quality Technology*, 14:935–966, 1972.
- [33] W. Nelson. *Applied Life Data Analysis*. Wiley, New York, 1982.
- [34] W. Nelson, V.C. Thompson. Weibull probability papers. *Journal of Quality Technology*, 3:140–146, 1971.
- [35] J.A. Newell, T. Kurzeja, M. Spence, M. Lynch. Analysis of recoil compressive failure in high performance polymers using two-, four-parameter Weibull models. *High Performance Polymers*, 14:425–434, 2002.
- [36] F.S. Queshi, A.K. Sheikh. Probabilistic characterization of adhesive wear in metals. *IEEE Transactions on Reliability*, 46:38–44, 1997.
- [37] S.E. Rigdon, A.P. Basu. *Statistical Methods for the Reliability of Repairable Systems*. Wiley-Interscience, New York, 2000.
- [38] A.K. Sheikh, J.K. Boah, D.A. Hansen. Statistical modelling of pitting corrosion and pipeline reliability. *Corrosion*, 46:190–196, 1990.
- [39] W.A. Shewart. *Economic Control of Quality Manufactured Product*. D. Van Nostrand, New York, 1931.
- [40] C.V. Sia, L. Fernando, A. Joseph, S.N. Chua. Modified Weibull analysis on banana fiber strength prediction. *Journal of Mechanical Engineering and Sciences*, 12(1):3461–3471, 2018.
- [41] P.A. Tobias, D.C. Trindade. *Applied Reliability*. CRC, Boca Raton, 1995.

- [42] B.W. Tuinema, J.L. Rueda Torres, A.I. Stefanov, F.M. Gonzalez-Longatt, M.A. van der Meijden. *Probabilistic Reliability Analysis of Power Systems*. Springer, Cham, 2020.
- [43] W. Weibull. A statistical theory of the strength of material. *Ingeniors Vetenskaps Akademiens Handligar*, 151:5–45, 1939.
- [44] W. Weibull. A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics*, 18:293–296, 1951.
- [45] S. Woo. *Reliability Design of Mechanical Systems*. Springer, Singapore, 2020.
- [46] S. Xie, H. Lin, Y. Wang, Y. Chen, W. Xiong, Y. Zhao, S. Du. A statistical damage constitutive model considering whole joint shear deformation. *International Journal of Damage Mechanics*, 29(6):988–1008, 2020.

**Weibull distribution and its application in the optimization of operating costs of non-repairable elements**

**Abstract:** The first three parts of the chapter contain an introduction, the basics of the theory of reliability and modeling of aging processes of machine and device elements. They are an introduction to this subject matter and are supplemented by an extensive bibliography allowing for the exploration of the concepts presented in them. Part four demonstrates how knowledge about reliability and aging components can be practically used in a production environment. The fourth part presents numerical methods of optimizing the operating costs of non-repairable elements that can be used in the maintenance departments of manufacturing companies.