

Stanisław Latoś\*

SZCZEGÓLNE POZIOME OSNOWY GEODEZYJNE  
- PRZESZŁOŚĆ, STAN AKTUALNY I PRZYSZŁOŚĆ  
W ZAKRESIE ICH ZAKŁADANIA I FUNKCJONOWANIA

---

## 1. Słowo wstępne

Osnowa, rozumiana jako podstawa rozwoju i funkcjonowania wielu dziedzin działalności człowieka, odgrywała zawsze istotną rolę w praktyce. Dobra osnowa jest podstawą poprawnego prowadzenia działalności nie tylko w dziedzinie, której dotyczy bezpośrednio, ale i w dziedzinach pokrewnych. Szczególne znaczenie w geodezji ma osnowa występująca pod nazwą „osnowa geodezyjna”.

Zakładanie i ustalanie zasad funkcjonowania osnów geodezyjnych od dziesiątków lat stanowiło problem, który w poszczególnych okresach był rozwiązywany na różne sposoby, w zależności od potrzeb, celów i zadań oraz istniejących warunków zarówno terenowych, technicznych, jak i ekonomicznych. Uwarunkowania te powodowały, że pogląd na zadania, konstrukcje i funkcjonowanie rozpatrywanych osnów ulegał ciągłym zmianom. Zmiany najistotniejsze wystąpiły w ostatnim dziesięcioleciu ubiegłego wieku i dotyczyły sprecyzowania zarówno zadań osnów geodezyjnych i sposobu ich funkcjonowania, jak i technologii ich realizacji. Ostatecznie, osnowę geodezyjną zdefiniowano jako zbiór punktów w terenie, których wzajemne położenie w stosunku do punktów odniesienia określono przy zastosowaniu odpowiedniej techniki. Punkty odniesienia przyjmowano zarówno na powierzchni Ziemi, jak i w przestrzeni. Spowodowało to powstanie i funkcjonowanie do dziś technologii i nazw tak realizowanych osnów jako: geodezyjnych, astronomicznych, astronomiczno-geodezyjnych, a w ostatnich latach satelitarnych. W każdej z nich wyróżniono ponadto osnowę poziomą i wysokościową.

Niezależnie od charakteru i rodzaju rozpatrywanych osnów ich zadaniem było zawsze stworzenie bazy dla określania położenia względem siebie różnych obiektów, przedmiotów i zjawisk występujących na powierzchni Ziemi oraz dla monitorowania tych zmian dokonywanych w tym zakresie przez człowieka. Było to początkiem funkcjonującego dziś systemu informacji o terenie, dla którego podstawowe dane pozyskuje się na podstawie geodezyjnych pomiarów szczegółowych, wykonywanych w oparciu o punkty omawianej osnowy.

---

\* Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska, Katedra [nformacji o Terenie

Należy zauważyć, że w ostatnich latach coraz większe znaczenie i możliwości w zakresie zakładania i funkcjonowania osnów geodezyjnych zyskała metoda satelitarna. Pojawienie się tej metody i jej powszechne stosowanie postawiło pod znakiem zapytania celowość realizacji geodezyjnych osnów poziomych w postaci klasycznej, zalecanej jako standard w obowiązujących w tym zakresie w Polsce przepisach pomiarowych [14, 15 i 20]. Budowane dotychczas na niewielkich obszarach kraju (w chwili obecnej tylko na terenie województwa śląskiego) stacje aktywne (referencyjne) GPS stwarzają możliwości odejścia od potrzeby zakładania i funkcjonowania omawianych osnów w sposób klasyczny. Opracowano nawet program pokrycia takimi stacjami obszaru całej Polski. Byłoby ich około 60, zainstalowanych na obszarze kraju za kwotę szacowaną na około 12 mln złotych [2]. Ze względu na duże koszty budowy i obsługi takiego systemu zainstalowano go w Polsce tylko na terenie jednego województwa, ale i na nim nie wdrożono go jeszcze do produkcji. Nadal nie wiadomo, kiedy rozwiązanie takie zostanie zrealizowane i uruchomione na obszarze całej Polski.

Tymczasem na obszarze całego kraju istnieje pilna potrzeba prowadzenia różnego rodzaju szczegółowych pomiarów geodezyjnych i opracowywania ich wyników w obowiązującym systemie odniesień przestrzennych. Obecnie to geodeci powiatowi poszczególnych powiatów, odpowiedzialni bezpośrednio za stan i wykonywanie wszystkich prac geodezyjnych zgodnie z obowiązującymi standardami, w tym również i geodezyjnych osnów szczegółowych, muszą zapewnić na swoim terenie osnowę geodezyjną o odpowiedniej dokładności, niezbędną do prowadzenia tych prac. Istnieją realne przesłanki pozwalające sądzić, że jeszcze dziś oraz w bliskiej przyszłości będzie występować konieczność stosowania metod klasycznych, udoskonalania ich czy ewentualnego poszukiwania innych technologii zakładania takich osnów, lub o cechach do nich zbliżonych, w sposób szybszy i tańszy.

W pracy przedstawiono wyniki badań, analiz i eksperymentów prowadzonych w rozpatrywanym zakresie przez wiele lat i kontynuowanych przez autora oraz jego współpracowników.

## 2. Nieco historii i wynikające z niej wnioski

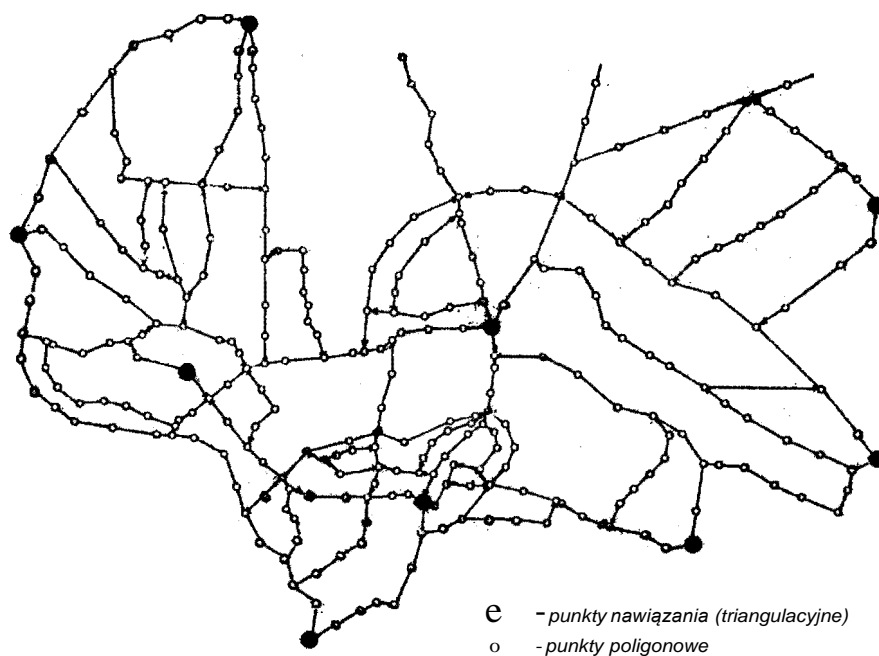
Abstrahując od szczegółowej analizy stanu i funkcjonowania osnów pochodzących sprzed końca XIX i początku XX wieku, należy zauważyć, że do czasu uzyskania przez Polskę niepodległości sytuacja na ziemiach polskich była w tej dziedzinie zróżnicowana, uzależniona ściśle od standardów obowiązujących w państwach zaborczych. Położenie punktów osnów geodezyjnych wyznaczano zarówno metodą analityczną (najczęściej tryangulacyjną lub poligonową), jak i graficznie (metodą stolikową). Pomiary szczegółowe w oparciu o punkty tych osnów wykonywano głównie metodą domiarów prostokątnych lub metodą stolikową. Sytuacja taka wynikała z ograniczonych możliwości powszechnie produkowanego i stosowanego w tym okresie sprzętu pomiarowego i obliczeniowego.

Istotnym wydarzeniem w historii rozwoju geodezyjnych osnów w Polsce było zakończenie w latach 60. ubiegłego stulecia prac nad założeniem nowej państwowej sieci triangulacyjnej, którą tworzyła sieć astronomiczno-geodezyjna, wypełniająca i zagęszczająca [43]. Punkty tych sieci, zagęszczające teren do poziomu 1 punkt na obszar od 4 do 16 km<sup>2</sup>, do-

gęszczane później w miarę potrzeb sieciami triangulacji lokalnego znaczenia, stworzyły możliwości zakładania na terenie całego kraju metodą poligonową nawiązywanej do nich osnowy poligonowej. Ze względu na rodzaj, sposób realizacji i przeznaczenie rozpatrywane osnowy w tym okresie dzielono na triangulacyjne, poligonowe i inne [19].

Zakończenie prac nad założeniem osnowy triangulacyjnej stworzyło podstawy bujnego rozwoju funkcjonujących jeszcze do dziś, już jako osnowy pomiarowe, sieci poligonowych różnych klas i rzędów, zgodnie z obowiązującymi ówczynie przepisami pomiarowymi [13] i [19]. Niestety osnowę poligonową z tego okresu tworzyła bardzo duża liczba punktów trwale stabilizowanych w terenie, o stosunkowo niskiej dokładności. Tak duża liczba tych punktów na pewnym etapie przerosła możliwości dokonywania ich okresowych przeglądów, konserwacji i uzupełnień. Szacuje się, że pod koniec lat 70. ubiegłego wieku liczba tych punktów w Polsce osiągnęła ponad 6 milionów, co przy powierzchni obszaru Polski (około 312 tys. km<sup>2</sup>) dawało przeciętne zagęszczenie terenu na poziomie 1 punkt na około 5 ha, zaś dokładność wyznaczenia położenia większości z nich była rzędu od kilku do kilkudziesięciu centymetrów. Stwierdzono, że co roku około 200 tys. z nich ulegało zniszczeniu lub uszkodzeniu, ale prawie tyle samo albo i więcej było nadal zakładanych. Tymczasem stosowane coraz częściej w tym okresie w produkcji nowoczesne przyrządy pomiarowe nie wymagały aż tak dużego zagęszczenia terenu punktami rozpatrywanej osnowy, ale za to okazało się niezbędne zwiększenie dokładności wyznaczenia ich położenia.

Analizując geometrię istniejących sieci poligonowych z tego okresu stwierdzono, że była ona bardzo często skomplikowana i niekorzystna dla dokładnego wyznaczenia położenia jej punktów (rys. 1).



Rys. 1. Sieć poligonowa sprzed 1970 r.

Dlatego przystąpiono do badań nad ustaleniem optymalnego standardu zagęszczenia terenu punktami rozpatrywanej osnowy oraz nad wyborem właściwej technologii i konstrukcji sieci dla ich wyznaczania. Przy określeniu parametrów geometrycznych i kryteriów dokładnościowych pomiaru elementów tworzących sieci geodezyjne kierowano się możliwościami, jakie przy zakładaniu osnów i prowadzeniu pomiarów szczegółowych w oparciu o ich punkty stwarzał stosowany coraz częściej w produkcji nowoczesny sprzęt pomiarowy. Równocześnie prowadzono prace nad poszukiwaniem najlepszego znaku i sposobu jego utrwalania, mając na uwadze zapewnienie tym punktom trwałości w przestrzeni i czasie w sytuacji znacznego ograniczenia ich liczby.

Autor niniejszego opracowania uczestniczył w badaniach nad rozwiązywaniem tych problemów, przedstawiając wyniki swych prac w wielu publikacjach z tego zakresu. Bezpośrednim powodem jego aktywnego zaangażowania się w rozwiązywanie omawianego problemu było zatrudnienie go jako konsultanta naukowego w Krakowskim Przedsiębiorstwie Geodezyjnym przy okazji zlecenia mu w latach 1974-1975 konserwacji osnowy poligonowej na terenie Krakowa. Wykorzystując wyniki dostępnych badań w rozpatrywanym zakresie konsultant zaproponował odstąpienie od dotychczasowego rozwiązywania tego problemu, polegającego na przeglądzie, konserwacji i wznowieniu czy uzupełnieniu wszystkich istniejących punktów tej osnowy z zachowaniem jej dotychczasowej konstrukcji, utworzonej z dużej liczby ciągów o krótkich bokach.

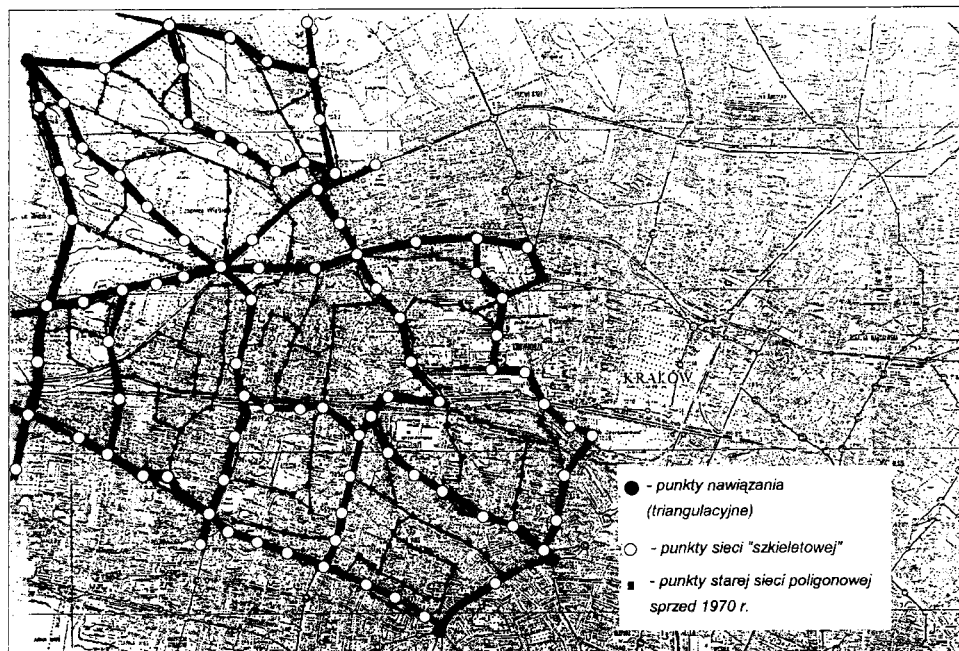
Zaproponowano utworzenie na jej kanwie konstrukcji nowego typu sieci, o długich bokach. Osnowę tę nazwano w okresie jej realizacji (lata 1974-76) „siecią zerową” lub „szkieletową”, a po pewnym czasie przekornie i żartobliwie – „l. atosiówką”. Fragment szkicu takiej sieci na tle sieci istniejącej pokazano na rysunku 2, a projekt jej konstrukcji przedstawiono w [25].

Należy podkreślić, że było to pierwsze tak zaprojektowane w Polsce rozwiązanie rozpatrywanej osnowy, wyprzedzające o kilka lat tego typu konstrukcje zalecane jako obligatoryjne w wydanych w latach 1978-84 instrukcjach pomiarowych, obowiązujących do chwili obecnej. W rozwiązaniu tym większość punktów istniejącej osnowy, położonych wzdłuż projektowanych ciągów sieci szkieletowej, po ich inwentaryzacji zostało włączonych do tej sieci jako punkty adaptowane. Położenie reszty z nich, w miarę możliwości, planowano wyznaczyć jako punkty bliskie z punktów zaprojektowanej osnowy szkieletowej. Punkty pozostałych istniejących ciągów, nie włączonych do projektowanej sieci szkieletowej, potraktowano jako punkty trwale stabilizowanej osnowy pomiarowej. Ze względów ekonomicznych odstąpiono jednak przy tym od ich inwentaryzacji już na etapie realizacji rozpatrywanej osnowy.

Zaprojektowaną osnowę miasta Krakowa i terenów do niego przyległych tworzyło łącznie około 3500 punktów, połączonych ciągami poligonowymi, o długościach boków w ciągu od 120 do 600, przeciętnie około 300 m i ich liczbie w poszczególnych ciągach mniejszej niż 10. Takie rozwiązanie pozwoliło na pięciokrotne zmniejszenie liczby punktów projektowanej dla tego obszaru osnowy). W późniejszych pracach nad modernizacją istniejących osnów rozwiązanie takie zostało uznane za standard obowiązujących do dziś przepisów pomiarowych w przypadku zakładania poziomej geodezyjnej osnowy szczegółowej III klasy metodą poligonową [14, 15 i 20].

---

<sup>1</sup>Zaproponowane rozwiązanie przedstawione pod nazwą „Projekt poligonizacji m. Krakowa i terenów przyległych” zostało wyróżnione w Konkursie Jakości Robót Geodezyjnych zorganizowanym przez SGP w roku 1976.



Rys. 2. Fragment szkicu sieci „szkieletowej”

Bliższe dane i szczegóły techniczne przyjęte w projekcie realizacji tej osnowy znaleźć można w [25]. Efekty uzyskane po jej założeniu potwierdziły możliwość zapewnienia wyznaczenia położenia punktów tak zrealizowanej osnowy z dokładnością wyższą niż 0,10 m.

Należy podkreślić, że obok opisanych powyżej prac prowadzonych przez autora niniejszego opracowania, prowadzone były równoległe badania nad rozpatrywanym problemem w ramach tematu resortowego I24-13, koordynowanego przez IGiK pod tytułem „Opracowanie zasad i technologii zakładania szczegółowych osnów geodezyjnych z zastosowaniem nowoczesnego sprzętu”, w którym brał on czynny udział jako kierownik zespołu wykonawców z AGH. Efektem tych prac było przygotowanie materiałów dla opracowania instrukcji i wytycznych technicznych zakładania poziomych geodezyjnych osnów szczegółowych<sup>21</sup>.

W wyniku tych prac dokonano modernizacji i zmiany dotychczasowej struktury rozpatrywanej osnowy dzieląc ją na: podstawową I klasy, szczegółową II i III klasy oraz pomiarową. Podział taki oraz ustalone dla niego kryteria zakładania i funkcjonowania poszczególnych rodzajów tych osnów obowiązują w Polsce do dziś od ponad ćwierć wieku, pomimo że w latach 2000-2001 dokonano modernizacji tych przepisów. Zgodnie z tymi przepisami [14] i [20] w zakresie typowych osnów geodezyjnych poziomych przyjęto ich podział na: podstawowe I klasy, szczegółowe klasy II i III oraz pomiarowe. Szczegółowo o zadaniach, spo-

<sup>21</sup> Za prace z tego zakresu pt. „Metoda powierzchniowych, nieregularnych sieci kątowo-liniowych zakładania szczegółowej osnowy poziomej” zespół wykonawców otrzymał w roku 1979 nagrodę zespołową Prezesa Głównego Urzędu Geodezji i Kartografii.

sobach zakładania, standardzie zagęszczenia i dokładności wyznaczania położenia punktów każdej z tych osnów traktują obowiązujące w tym względzie przepisy pomiarowe oraz projektowane wersje ich modernizacji. Dla rozważanej w niniejszym opracowaniu problematyki przypomnimy tylko niektóre cechy i kryteria dotyczące osnów szczegółowych, w tym głównie III klasy.

Osnowy szczegółowe, zgodnie ze wspomnianymi przepisami, powinny mieć charakter sieci powierzchniowych, o stosunkowo dużym standardzie zagęszczenia terenu ich punktami (rzędu 1 punkt na obszar o powierzchni od około 1 km<sup>2</sup> do 8 km<sup>2</sup> <sup>3)</sup> – dla klasy II, oraz na obszar od około 10 do 100 ha – dla klasy III, w zależności, w każdym przypadku, od sposobu i stopnia zainwestowania danego terenu) oraz ustalonej dokładności wyznaczenia położenia ich punktów ( $mp = 0,05$  m – dla klasy II, oraz  $mp = 0,10$  m i mniej – dla klasy III). W razie potrzeby osnowy te zagęszczano dodatkowo osnową pomiarową.

Podstawowym zadaniem punktów wszystkich tych osnów było uzbrojenie terenu w punkty geodezyjne o odpowiedniej dokładności stanowiące bazę wykonania w oparciu o nie pomiarów szczegółowych, w ilości pozwalającej na racjonalne wykonywanie tych pomiarów w określonych warunkach terenowych.

### **3. Ustalenia odnośnie analiz i badań w zakresie wyboru technologii zakładania i funkcjonowania osnów szczegółowych i pomiarowych dawniej i dziś**

#### **3.1. Wprowadzenie**

Ostatnie dwudziestolecie minionego wieku charakteryzował burzliwy rozwój techniki, w tym głównie elektroniki. Dla geodezji był to okres szczególny, w którym skonstruowano i wdrożono powszechnie do produkcji stacje pomiarowe Total Station, komputery o dużej mocy obliczeniowej, skanery i plotery o dużej rozdzielczości oraz system satelitarny GPS, który pozwolił na poszerzenie obowiązującej systematyki osnów o sieci POLREF i EUREF-POL, o niespotykanej dotąd wysokiej dokładności. Równocześnie w życiu gospodarczym większości krajów pojawiły się nowe potrzeby w zakresie monitorowania zmian zachodzących w przestrzeni, prowadzonego w oparciu o punkty osnów geodezyjnych. Tworzone systemy informacji o terenie w różnych ich warstwach wymagały dostarczania do jej bazy danych znacznie dokładniejszych niż dotąd informacji. W latach tych Polska przeszła na gospodarkę rynkową, co zmieniło pogląd na wartość gruntów i gospodarowanie nimi. W świecie pojawiła się tendencja do globalizacji całej gospodarki.

Wymienione uwarunkowania stały się impulsem do podjęcia nowych analiz, badań i eksperymentów w wielu dziedzinach geodezji, w tym również w zakresie osnów szczegółowych, zakładanych w sposób klasyczny i prowadzonych w oparciu o nie samych pomiarów szczegółowych. Problematykę tę autor opracowania naświetlił już wcześniej w pozycjach [23, 26] oraz [27, 28 i 37].

---

<sup>3)</sup> W rozważaniach pominięto tereny zwartych kompleksów leśnych, na których wskaźnik ten może być rzędu nawet 12 km<sup>2</sup>.

Należy przypomnieć, że przeprowadzone wcześniej rozważania i analizy wskazywały na potrzebę modernizacji rozpatrywanych osnów, która miała dotyczyć poważnego zmniejszenia liczby jej punktów oraz zwiększenia dokładności wyznaczenia ich położenia. W przytoczonych powyżej przepisach pomiarowych podano, jakie wymagania konstrukcyjne i dokładnościowe stawiano rozpatrywanym osnowom. Nie do końca jednak wykazano słuszność przyjmowanych przy ich ustalaniu założeń, w świetle zmieniających się potrzeb oraz możliwości ich zaspokajania w nowych uwarunkowaniach technicznych i finansowych. Stąd problem zakładania i funkcjonowania rozpatrywanych osnów wymagał dalszych analiz, w celu ustalenia sposobu poprawnego ich rozwiązywania. Autor niniejszej pracy wraz ze współpracownikami podjął się rozwiązania tego problemu w ramach prowadzonego w latach 1995-1997 grantu na temat: „Koncepcja zakładania osnów geodezyjnych i wykonywania pomiarów szczegółów terenowych w aspekcie systemów informacji o terenie”.

### **3.2. Uzasadnienie merytoryczne i przesłanki przeprowadzanych analiz i dokonanych ustaleń w zakresie zadań rozpatrywanych osnów oraz ich dokładności**

Uzasadnienie merytoryczne przyjętego rozumowania stanowią wyniki przeprowadzonych w ostatnich latach dociekań, analiz i badań nad dokładnością wyznaczenia położenia punktów rozpatrywanych osnów i pomiaru szczegółów sytuacyjnych przy stosowaniu do tego celu aktualnie dostępnych przyrządów i metod pomiarowych oraz wymagania dokładnościowe stawiane tym pomiarom, dotyczące szczególnie punktów granicznych. Nietrudno zauważyć, że dotychczasowe techniki i kryteria dokładnościowe pomiaru szczegółów sytuacyjnych uzależniane były od ich rodzaju, a ściślej od zakwalifikowania ich do jednej z trzech grup dokładnościowych. Konsekwencją takiego postępowania było dążenie do uzyskiwania informacji o terenie, pozwalających na ich wizualizację w postaci mapy kreskowej, wykonywanej w odpowiedniej skali, w zależności od rodzaju i stopnia zainwestowania (charakteru) terenu. Tak więc skala graficznego opracowania i prezentacji wyników pomiarów została przyjęta jako zasadniczy wyznacznik wymaganej dokładności pomiaru szczegółów w terenie, a następnie również dokładności pozyskiwania z map informacji o nim. Skala mapy była również wyznacznikiem ustalania dokładności osnowy szczegółowej i pomiarowej.

W chwili obecnej, przy powszechnym przechodzeniu z map kreskowych na mapy numeryczne, szczególnie w warstwie ewidencji gruntów, wspomniany wyznacznik nie znajduje naukowego i praktycznego uzasadnienia. W bazie danych tej mapy można bowiem rejestrować, przechowywać i przetwarzać wszystkie informacje z taką dokładnością, z jaką są one pozyskiwane (wyznaczane). Dokładność ta nie jest również obniżana przy przetwarzaniu tych danych i udostępnianiu użytkownikom mapy interesujących ich informacji o terenie.

Należy jednak pamiętać, że istnieje ścisły związek pomiędzy dokładnością pozyskiwania informacji a jej kosztami. Powinna więc być ona ustalona i zachowana na najwyższym, ale możliwym jeszcze do osiągnięcia w praktyce poziomie, przy stosowaniu dostępnego sprzętu pomiarowego oraz uwzględnieniu zadań, jakie SIT (mapa) ma spełniać w gospodarce narodowej.

Nie ulega wątpliwości, że spośród wszystkich szczegółów tworzących SIT najwyższa dokładność wyznaczenia położenia wymagana jest dla punktów granicznych. Wynika to z potrzeby zagwarantowania z odpowiednią dokładnością prawa własności w określonych granicach oraz ochrony interesów majątkowych stron obrotu nieruchomości, co ma ścisły związek z potrzebą określenia położenia punktów z ustaloną dokładnością, możliwie najwyższą do osiągnięcia w praktyce, przy zastosowaniu do tego celu powszechnie używanych przyrządów i technik pomiarowych. Położenie wszystkich obiektów i szczegółów terenowych zlokalizowanych na działce lub w jej otoczeniu może być określone z wystarczającą dokładnością z wyznaczonych wcześniej i utrwalonych punktów granicznych. Dokładność wyznaczenia położenia i kształtu geometrycznego wszystkich obiektów budowlanych i inżynierskich, o ile tylko zbyt bliska lokalizacja nie powoduje kolizji w poprawnym ich funkcjonowaniu, nie jest tak istotna jak dla punktów granicznych. Niezbyt dokładne wyznaczenie położenia punktów granicznych nieruchomości może być powodem nieporozumień i sporów granicznych. Powoduje ono również, że obliczone na ich podstawie pola powierzchni działek są wyznaczane z określoną, nie zawsze wystarczającą dokładnością, a to, oprócz innych atrybutów, decyduje o wartości działki przy jej wycenie.

Wymienione wyżej względy nakazują z pierwszej grupy dokładnościowej szczegółów sytuacyjnych wydzielić granice państwowe, administracyjne i nieruchomości (działek) jako szczegóły o najwyższej wymaganej dokładności wyznaczenia położenia punktów ich załamania, traktując je pod tym względem jako szczegóły grupy „zerowej”. Ponieważ dokładność ta decyduje o precyzji określenia wielkości pola powierzchni wyznaczanych przez nie działek, a to zaś w sposób zasadniczy ma wpływ na ich wartość, dopuszczalny błąd wyznaczenia położenia punktów granicznych powinien być wyznacznikiem przy ustalaniu dokładności pozyskiwania informacji o terenie na podstawie pomiarów geodezyjnych. Za podejściem takim przemawia również fakt, że w przeszłości w wielu przypadkach stanowiły one osnowę pomiarową przy ustalaniu innych granic i szczegółów terenowych. Również i dziś większość trwale stabilizowanych punktów granicznych nieruchomości gruntowych może stanowić bazę wyznaczenia podobnych punktów z dokładnością nie większą niż szczegóły grupy „zerowej”. W dalszej części pracy spróbujemy określić rząd wymaganej i możliwej do osiągnięcia dokładności wyznaczenia położenia punktów granicznych.

### 3.3. Rozważania teoretyczne dla ustalenia kryteriów dokładnościowych zakładania rozpatrywanych osnów

Z rozmów z wykonawcami prac rozgraniczeniowych, scaleniowych i podziałowych wynika, że zainteresowane strony za zadowolające uznają wyznaczenie granic własności ich działek z błędem nie większym niż 5 cm. Według opinii większości rzeczoznawców prowadzących wycenę nieruchomości gruntowych, wyznaczanie współrzędnych punktów granicznych wycenianych działek budowlanych powinno być dokonane z dokładnością pozwalającą na określenie na ich podstawie wielkości pól powierzchni działek  $S$  z odchyleniem standardowym rzędu  $0,5\% S^4$ .

<sup>4)</sup> Z dokonanych analiz wynika, że przy zachowaniu dokładności punktów granicznych typowych działek budowlanych z błędem rzędu 5 cm ich pola powierzchni  $S$  będą wyznaczone z wyżej podanym błędem standardowym.



Wprowadzie działki o przeznaczeniu rolnym lub leśnym nie muszą mieć wyznaczonego pola powierzchni na poziomie dokładności wymaganym dla działek budowlanych, jednak okoliczność ta nie powinna obniżać kryteriów dokładnościowych pomiaru osnowy i punktów granicznych z następujących powodów:

- zakładana osnowa szczegółowa powinna być jednorodna,
- wybrane punkty graniczne na terenach rolnych i leśnych spełniać będą również rolę punktów osnowy pomiarowej.

Dla potwierdzenia słuszności postawionej wyżej hipotezy rozpatrzono związek, jaki istnieje pomiędzy ustalonym na określonym poziomie ufności polem powierzchni działki a niedokładnością określenia współrzędnych jej punktów granicznych. Wiadomo, że wartość liczbowa błędu wyznaczania pola powierzchni działki liczonego ze współrzędnych punktów załamania jej granic zależy zarówno od wpływu niedokładności pomiaru położenia punktów granicznych, jak i od niedokładności określenia położenia punktów osnowy szczegółowej, z której pomiar ten jest dokonywany. Po przyjęciu macierzy kowariancji dla typowej konstrukcji pomiarowej można więc ustalić reprezentatywną macierz kowariancji dla punktów osnowy szczegółowej. Niezmienniki tej macierzy będą definiowały dokładność pomiaru elementów wyznaczających osnowę szczegółową. Szczegółowe dociekania na ten temat przeprowadzono w [36].

Dokonując ścisłej analizy dokładności wyznaczenia pola powierzchni działki  $S$  ze wzoru Gaussa w postaci

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_{i-1}) y_i \quad (1)$$

gdzie  $x_i$ ,  $y_i$  oznaczają współrzędne punktów załamania linii granicznej, wyznaczone z osnowy geodezyjnej na podstawie wykonanych w oparciu o jej punkty pomiarów sytuacyjnych, przy zastosowaniu do tego celu jednoznacznych konstrukcji pomiarowych, wariancja  $V(S)$  pola powierzchni działki wyrazi się wzorem

$$V(S) = \mathbf{F}_S^T [\mathbf{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{osnowy} + \mathbf{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{pomiaru}] \mathbf{F}_S \quad (2)$$

gdzie:

- $\mathbf{F}_S$  – jednokolumnowa macierz różniczki  $dS$  względem poszczególnych współrzędnych punktów granicznych,
- $\mathbf{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  – macierz kowariancji dla współrzędnych wszystkich punktów załamania linii granicznej.

Wariancja pola powierzchni działki określona wzorem (2) jest na określonym poziomie prawdopodobieństwa, wynikającym z wielowymiarowego rozkładu chi-kwadrat. Wymiar tego rozkładu jest określony przez wymiar macierzy kowariancji współrzędnych punktów załamania linii granicznych działki.

Dla określenia współczynnika  $k^2$ , przez który należy wymnożyć obliczoną wzorem (2) wariancję pola powierzchni działki, aby uzyskać ustalone prawdopodobieństwo jej wyznaczenia, realizuje się nierówność

$$P[\mathbf{Z}^T (\mathbf{Cov}(\mathbf{Z}))^{-1} \mathbf{Z} < k^2] = P[\chi_n^2 < k^2] = 1 - \alpha \quad (3)$$

gdzie:

- $\mathbf{Z}$  – wektor zmiennej losowej, odpowiadający wektorowi  $\mathbf{F}_S$ ,
- $\mathbf{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  – macierz kowariancji wektora  $\mathbf{Z}$ , odpowiadająca macierzy  $\mathbf{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,
- $\chi_n^2$  – rozkład chi-kwadrat w przestrzeni  $n$ -wymiarowej, przy czym  $n$  odpowiada wymiarowi macierzy  $\mathbf{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,
- $k^2$  – współczynnik transformacji  $V(S)$  na poziomie ufności  $(1 - \alpha)$ ,
- $(1 - \alpha)$  – wartość prawdopodobieństwa (poziom ufności).

Jeżeli ustalimy prawdopodobieństwo  $(1 - \alpha)$ , z jakim chcemy realizować nierówność (3) w przestrzeni  $n$ -wymiarowej, to na podstawie wartości krytycznych  $\chi^2(\alpha, n)$  rozkładu chi-kwadrat możemy określić współczynniki  $k^2$ , przez które należy wymnożyć wariancję pola powierzchni działki, aby przejść na poziom prawdopodobieństwa  $(1 - \alpha)$ .

Dla przykładu, jeśli rozpatrzmy działkę określoną przez 4 punkty graniczne, to wektor  $\mathbf{F}_S$  i macierz  $\mathbf{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  definiuje przestrzeń 8-wymiarową, stąd  $k^2 = 15,51$ , czyli wariancja (2) pola powierzchni działki realizowana dla prawdopodobieństwa  $P = 0,95$  będzie wynosiła

$$V(S)_{P=0,95} = k^2 \hat{V}(S) = 15,51 \hat{V}(S) \quad (4)$$

Odchylenie standardowe (błąd średni)  $\sigma(S)$  tego pola powierzchni przyjmuje wartość

$$\sigma(S)_{P=0,95} = k \hat{\sigma}(S) = 3,94 \hat{\sigma}(S) \quad (5)$$

Związki (4) i (5) można wykorzystać do ustalenia dopuszczalnych wartości wariancji pola powierzchni działki.

Podstawą do określenia kryteriów dokładnościowych wyznaczenia punktów osnowy szczegółowej i pomiarów sytuacyjnych będzie ustalona wartość stosunku  $s$  odchylenia standardowego pola powierzchni działki (dla poziomu ufności  $1 - \alpha = 0,95$ ) do wartości tego pola, czyli uwzględniając wzór (5) można zapisać

$$\frac{3,94 \hat{\sigma}(S)}{S} \leq s \quad (6)$$

przy czym  $S$  jest zdefiniowane wzorem (1), zaś  $\hat{\sigma}(S)$  stanowi pierwiastek kwadratowy z wariancji  $V(S)$  zdefiniowanej wzorem (2).

Wartość współczynnika  $s$  proponuje się ustalić na poziomie 0,5%, czyli wzór (6) przyjmie postać

$$\frac{3,94 \hat{\sigma}(S)}{S} \leq \frac{1}{200} \quad (7)$$

Dokonując przekształceń zależności (7), przy założeniu  $3,94 \cong 4$ , otrzymamy nierówność

$$\frac{\hat{\sigma}(S)}{S} \leq \frac{1}{800} \quad (8)$$

która będzie stanowiła podstawę do ustalenia kryteriów dokładnościowych wyznaczenia osnowy szczegółowej i pomiarów sytuacyjnych.

Po uwzględnieniu zależności (2) nierówność (8) można zapisać w następującej postaci

$$F_S^T [\text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\text{osnowy}} + \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\text{pomiaru}}] F_S \leq \left( \frac{S}{800} \right)^2 \quad (9)$$

Realizacja wzoru (9) dla typowych konstrukcji pomiarowych i typowych działek pozwoli udzielić odpowiedzi na następujące pytania: jak dokładnie wyznaczać współrzędne ( $\text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ) punktów osnowy szczegółowej oraz jak dokładnie wykonywać pomiar (zdjęcie szczegółów) punktów granicznych, aby błąd pola powierzchni działki, na poziomie ufności  $1 - \alpha = 0,95$ , nie przekraczał 0,5% wielkości pola powierzchni tej działki?

Analiza dokładności wyznaczenia położenia punktów granicznych, przy zastosowaniu do tego celu ogólnie dostępnego, nowoczesnego sprzętu pomiarowego, z punktów osnowy geodezyjnej uznanych za bezbłędne, wskazuje na możliwość dokonania tej operacji z błędem nie większym niż 3 cm. Stąd dla zachowania ustalonego powyżej kryterium odnośnie dokładności wyznaczenia położenia punktów granicznych w obowiązującym układzie współrzędnych punkty osnowy geodezyjnej, z której punkty graniczne są zamierzone, powinny być wyznaczone z błędem nie większym niż 5 cm.

### 3.4. Ocena dokładności osnów geodezyjnych

Do oceny dokładności osnów geodezyjnych o różnym przeznaczeniu wykorzystuje się różne charakterystyki dokładnościowe. Istotnym problemem jest wybór do tego celu najlepszej z nich.

Przy charakterystyce typowych osnów geodezyjnych ich dokładność charakteryzuje się najczęściej za pomocą:

- błędów średnich  $m_x$  i  $m_y$  współrzędnych  $x$  i  $y$  i tak zwanych błędów średnich punktów  $m_p = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$  oraz  $A$ ,  $B$  i  $\varphi$ , czyli parametrów elips błędu średniego – przy wyznaczaniu położenia pojedynczych punktów;
- parametrów elips błędu względnego określających dokładność względnego wyznaczenia dwóch rozpatrywanych punktów, czyli długości i kierunku, a więc skali i orientacji sieci – przy analizie błędów położenia dwóch punktów;
- parametrów elips błędu średniego określających dokładność wzajemnego położenia wierzchołka rozpatrywanego kąta w stosunku do punktów wyznaczających jego lewe i prawe ramię, czyli kształtu sieci – przy analizie błędów położenia trzech punktów.

Każda z wymienionych charakterystyk posiada określoną właściwość i przydatność. Najczęściej dokładność osnowy charakteryzuje się podając błędy  $m_x$ ,  $m_y$  i  $m_p$ . Należy jednak pamiętać, że są to informacje niepełne, a nawet mylące, jeśli nie będą uzupełnione informacją o ustaleniu układu współrzędnych. Nie uwzględniają one również zależności korelacyjnych pomiędzy współrzędnymi punktów. Są jednak najprostszymi charakterystykami dokładności, łatwo uzyskiwanymi z wyrównania sieci geodezyjnych. Odpowiadają też dotychczasowym przyzwyczajeniom w tym zakresie i ułatwiają w znacznym stopniu usystematyzowanie i klasyfikację osnów.

Biorąc pod uwagę wymienione wyżej zalety i wady charakteryzowania dokładności sieci za pomocą parametrów odnoszących się do jej poszczególnych punktów, zaproponowano do tej oceny użycie parametru, który w znacznym stopniu ograniczy wspomniane powyżej niedoskonałości i wady, głównie zależność od ustalenia układu współrzędnych. Szczegółowe wywody na ten temat można znaleźć w [30].

Dla ustalenia zależności na proponowany parametr charakterystyki dokładnościowej sieci zbadano zmienność macierzy wariancyjno-kowariancyjnej w różnych układach kartezjańskich. W tym celu wykonano transformację tej macierzy uwzględniając związki pomiędzy współrzędnymi w postaci

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi\end{aligned}\quad (10)$$

gdzie:

- $\{x, y\}$  - układ pierwotny,
- $\{x', y'\}$  - układ aktualny,
- $\varphi$  - kąt obrotu obu układów współrzędnych.

Transformacja macierzy  $[Q]$  z układu  $\{x, y\}$  na nowy układ  $\{x', y'\}$  odbywa się według wzoru

$$\begin{bmatrix} Q'_{xx} & Q'_{xy} \\ Q'_{xy} & Q'_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial x'} \\ \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial y'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{xy} & Q_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial x'} \\ \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial y'} \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

Po uwzględnieniu zależności (10) wzór (11) otrzyma postać

$$\begin{bmatrix} Q'_{xx} & Q'_{xy} \\ Q'_{xy} & Q'_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{xy} & Q_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

Po dokonaniu odpowiednich przekształceń otrzymuje się:

$$\begin{aligned} Q'_{xx} &= \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} + \frac{Q_{xx} - Q_{yy}}{2} \cos 2\varphi + Q_{xy} \sin 2\varphi \\ Q'_{yy} &= \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} - \frac{Q_{xx} - Q_{yy}}{2} \cos 2\varphi - Q_{xy} \sin 2\varphi \\ Q'_{xy} &= -\frac{Q_{xx} - Q_{yy}}{2} \sin 2\varphi + Q_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (13)$$

Z porównania dwóch pierwszych zależności wynika warunek

$$Q'_{xx} + Q'_{yy} = Q_{xx} + Q_{yy} = \text{const} \quad (14)$$

który stanowi niezmiennik przekształcenia macierzy wariancyjno-kowariancyjnej dowodzący, że suma wariancji jest jednakowa we wszystkich układach współrzędnych.

Dla zbadania zależności elementów macierzy wariancyjno-kowariancyjnej, określono ich wartości ekstremalne. W tym celu wyznaczono najpierw pochodną wariancji, czyli

$$\frac{\partial Q'_{xx}}{\partial \varphi} = -(Q_{xx} - Q_{yy}) \sin 2\varphi + 2Q_{xy} \cos 2\varphi = 2Q'_{xy} \quad (15)$$

Z powyższego wzoru wynika, że zerowanie się pochodnej wariancji jest równoznaczne z zerowaniem się kowariancji. Zatem warunek na ekstremum wariancji przyjmuje postać

$$(Q_{xx} - Q_{yy}) \sin 2\varphi_w + 2Q_{xy} \cos 2\varphi_w \quad (16)$$

skąd

$$\text{tg } 2\varphi_w = \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \quad (17)$$

Ostatni związek określa kierunek  $\varphi_w$ , w którym wariancja przyjmuje ekstremalne wartości, czyli kierunek dużej osi elipsy błędu.

Aby wyznaczyć ekstremalne wartości wariancji określono związki na  $\sin 2\varphi_w$  i  $\cos 2\varphi_w$  w zależności od elementów macierzy wariancyjno-kowariancyjnej. Przekształcając zależność (17) do postaci

$$\frac{\sin 2\varphi_w}{\cos 2\varphi_w} = \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \quad (18)$$

i uwzględniając, że  $\sin^2 2\varphi_w + \cos^2 2\varphi_w = 1$ , po oznaczeniu pomocniczym

$$\frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} = a \quad (19)$$

na  $\cos 2\varphi_w$  i  $\sin 2\varphi_w$  otrzymamy wyrażenia

$$\cos 2\varphi_w = \sqrt{\frac{1}{a^2 + 1}}; \quad \sin 2\varphi_w = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + 1}} \quad (20)$$

W celu obliczenia ekstremalnych wartości wariancji w dwóch pierwszych równaniach (13) należy uwzględnić zależności (19) i (20).

Po odpowiednich przekształceniach wyrażenie na ekstremalne wartości wariancji, a tym samym na długości półosi elips błędów, otrzyma postać

$$Q_{ekstr.} = \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{(Q_{xx} - Q_{yy})^2}{2} + Q_{xy}^2} \quad (21)$$

W praktyce jako miarę dokładności wyznaczenia położenia punktu przy analizach różnego rodzaju konstrukcji geodezyjnych, w tym również w badaniach sieci modelowych, korzystniej jest przyjąć pierwiastek kwadratowy z maksymalnej wariancji, czyli

$$m_{max} = \sqrt{\frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} + \left[ \frac{(Q_{xx} - Q_{yy})^2}{2} + Q_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (22)$$

Wielkość ta reprezentuje maksymalny błąd średni położenia wyznaczanego punktu względem osnowy, którego kierunek wystąpienia  $\varphi_w$  jest określony wzorem (17). Warto zaznaczyć, że wielkość ta jest niezmiennikiem względem zmiany orientacji układu współrzędnych. Może zatem stanowić obiektywny wskaźnik oceny dokładności wyznaczenia położenia punktu względem osnowy.

Powróćmy z kolei do analizy kowariancji. Jej wartość ekstremalną obliczymy w sposób analogiczny jak dla wariancji, to znaczy najpierw określimy pochodną  $Q_{xy}$  względem kąta  $\varphi$ , czyli

$$\frac{\partial Q_{xy}}{\partial \varphi} = -(Q_{xx} - Q_{yy}) \cos 2\varphi - 2Q_{xy} \sin 2\varphi \quad (23)$$

Wartość kąta  $\varphi_k$ , dla którego powyższa pochodna przyjmie wartość 0, wyznaczamy z zależności

$$\operatorname{ctg} 2\varphi_k = \frac{-2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \quad (24)$$

Z porównania związków (17) i (24) wynika, że

$$\operatorname{tg} 2\varphi_w = -\operatorname{ctg} 2\varphi_k \quad (25)$$

skąd

$$\operatorname{tg} 2\varphi_w = \operatorname{tg} \left( 2\varphi_k \pm \frac{\pi}{2} \right) \quad (26)$$

co prowadzi do równości

$$\varphi_w = \varphi_k \pm \frac{\pi}{4} \quad (27)$$

z której wynika, że kierunek  $\varphi_k$  maksymalnej kowariancji różni się względem kierunku ekstremalnych wariancji o kąt równy  $\pm \frac{\pi}{4}$ .

Aby obliczyć ekstremalną wartość kowariancji należy w trzecim równaniu wzorów (13) uwzględnić zależność (24). Postępując analogicznie jak w przypadku poprzednim i dokonując podobnych przekształceń, wzór na ekstremalną wartość kowariancji przyjmie postać

$$Q_{xy_{ekstr.}} = \pm \sqrt{\left(\frac{Q_{xx} - Q_{yy}}{2}\right)^2 + Q_{xy}^2} \quad (28)$$

Ze wzorów (21) i (28) wynika, że ekstremalna wartość wariancji zależy całkowicie od ekstremalnej wartości kowariancji, gdyż  $(Q_{xx} + Q_{yy})$  jest niezmiennikiem przekształcenia, co wykazano wzorem (14).

Na podstawie warunku (15) można stwierdzić, że macierz wariancyjno-kowariancyjna  $[Q]$  przetransformowana według zależności (12) na układ obrócony o kąt  $\varphi_w$  staje się macierzą diagonalną, co znaczy, że kowariancja w tym układzie jest równa 0, czyli

$$\begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{xy} & Q_{yy} \end{bmatrix} \xrightarrow{T(\varphi_w)} \begin{bmatrix} Q_{\max} & 0 \\ 0 & Q_{\min} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Zgodnie ze wzorem (14) można więc napisać związek

$$Q_{\max} + Q_{\min} = Q_{xx} + Q_{yy} \quad (30)$$

który w interpretacji geometrycznej wykazuje, że suma wariancji współrzędnych punktu jest zawsze równa sumie ekstremalnych wariancji, czyli sumie kwadratów półosi elipsy błędu, a to potwierdza raz jeszcze niezmienny charakter tej sumy.

Z punktu widzenia praktycznego bardziej korzystne okazuje się rozpatrywanie niezmiennika macierzy  $[Q]$  zawierającego wszystkie elementy tej macierzy. Takim niezmiennikiem przekształcenia będzie wyznacznik z tej macierzy, czyli

$$\det[Q] = Q_{xx}Q_{yy} - (Q_{xy}^2) \quad (31)$$

Dla uzasadnienia powyższego zapiszemy wzory (13) przy użyciu oznaczeń pomocniczych w postaci

$$\begin{aligned} Q'_{xx} &= a + b \cos 2\varphi + c \sin 2\varphi \\ Q'_{yy} &= a - b \cos 2\varphi - c \sin 2\varphi \\ Q'_{xy} &= -b \sin 2\varphi + c \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (32)$$

Obliczmy teraz wartość wyznacznika macierzy wariancyjno-kowariancyjnej  $[Q']$  w skręconym układzie współrzędnych.

Wyrazi się on zależnością

$$\begin{aligned} \det[Q'] &= Q'_{xx}Q'_{yy} - (Q'_{xy})^2 = a^2 - ab \cos 2\varphi - ac \sin 2\varphi + ab \cos 2\varphi + \\ &- b^2 \cos^2 2\varphi - bc \sin 2\varphi \cos 2\varphi + ac \sin 2\varphi - bc \sin 2\varphi \cos 2\varphi + \\ &- c^2 \sin^2 2\varphi - b^2 \sin^2 2\varphi - c^2 \cos^2 2\varphi + 2bc \sin 2\varphi \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (33)$$

skąd po redukcji wyrazów podobnych otrzymamy

$$\det[Q'] = a^2 - b^2 - c^2 = Q_{xx}Q_{yy} - Q_{xy}^2 = \det[Q] \quad (34)$$

Z porównania wzorów (31) i (34) wynika, że wartość wyznacznika z macierzy wariancyjno-kowariancyjnej nie zależy od zmiany układu współrzędnych, zatem wyznacznik ten jest niezmiennikiem przekształcenia macierzy wariancyjno-kowariancyjnej.

Na podstawie związku (29) możemy napisać dodatkowe równanie

$$\det[Q] = Q_{\max}Q_{\min} \quad (35)$$

na podstawie którego można temu niezmiennikowi nadać geometryczną interpretację. W interpretacji geometrycznej prawa strona związku (35) określa wielkość proporcjonalną do kwadratu pola powierzchni elipsy błędu. Współczynnikiem proporcjonalności jest liczba  $\pi^2$ . Zatem wyznacznik z macierzy wariancyjno-kowariancyjnej pomnożony przez  $\pi^2$  jest również niezmiennikiem i określa kwadrat pola powierzchni elipsy błędu, czyli

$$P_{elipsy}^2 = \pi^2 \det[Q] \quad (36)$$

Dla zastosowań praktycznych zamiast elipsy wprowadzimy koło błędu, którego pole będzie równe polu elipsy. Ujmuje to związek

$$\pi^2 \det[Q] = \pi^2 r^4 \quad (37)$$

skąd

$$r = (\det[Q])^{\frac{1}{4}} \quad (38)$$

Określony wzorem (38) promień koła błędu jest niezmiennikiem przekształcenia macierzy wariancyjno-kowariancyjnej, zatem może stanowić parametr dokładności określenia położenia punktu.

W przypadku analizy dokładności sieci punktów można się posłużyć wartością promienia hiperkuli błędu, która będzie również niezmiennikiem przekształcenia całej macierzy wariancyjno-kowariancyjnej dla wszystkich punktów sieci. Jej wartość będzie określona wzorem

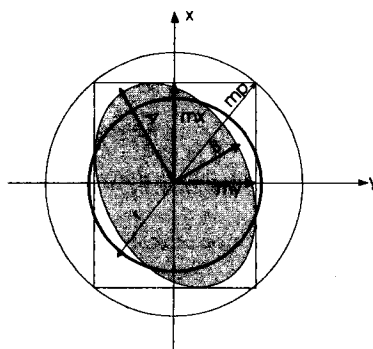
$$R = (\det[Q])^{\frac{1}{4n}} \quad (39)$$

przy czym  $n$  określa liczbę wyznaczanych punktów, dla których jest określona macierz wariancyjno-kowariancyjna.



Parametr (39) ma charakter niezmienniczy, a jednocześnie opisuje moc konstrukcji całej sieci za pomocą jednej wartości. Parametr ten może stanowić miarę niedokładności osnow geodezyjnych na etapie ich projektowania i zakładania.

Zależności geometryczne pomiędzy dotychczasowymi parametrami jednopunktowej charakterystyki sieci i proponowanym parametrem  $r$  pokazano na rysunku 3.



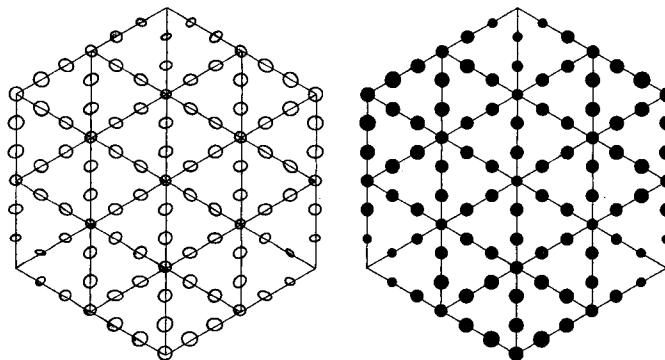
Rys. 3. Geometryczna interpretacja jednopunktowej charakterystyki dokładnościowej

Na rysunkach 4 i 5 przedstawiono graficzną ilustrację wyników analiz dokładności wybranych konstrukcji sieci modelowych za pomocą elips i kół błędów, przy określonych kryteriach dokładnościowych pomiaru elementów wyznaczających.

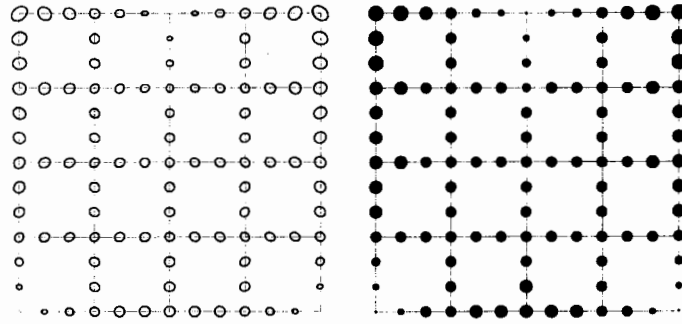
Z rysunku 3 wynika, że

$$m_x^2 + m_y^2 = m_p^2 = A^2 + B^2 \quad (40)$$

oraz że w okręgu o promieniu  $m_p$  mieści się zawsze elipsa błędów. Nie pozwala on jednak określić ekstremalnych kierunków występowania błędów, zaś różnica pola powierzchni tego koła i pola powierzchni elipsy może być dość znaczna, w zależności od stosunku długości półosi elipsy. Na rysunkach 4 i 5 przedstawiono elipsy i koła błędów dla wybranych konstrukcji geodezyjnych, zaczerpnięte z [31].



Rys. 4. Graficzna ilustracja dokładności sieci typu T/3/3/1 za pomocą elips i kół błędów



Rys. 5. Graficzna ilustracja dokładności sieci typu K/3/3/6 za pomocą elips i kół błędów

Promień koła błędu nie pozwala również określić ekstremalnych kierunków ich występowania, ale wyznacza obszar, którego pole powierzchni jest zawsze równe polu powierzchni elipsy błędu. Z tego względu parametr  $r$  może być stosowany do oceny dokładności osnów, zważywszy że przy ocenie tej bierzemy pod uwagę stopień prawdopodobieństwa, z jakim wyznaczany punkt znajdzie się w tym kole.

Wymienione powyżej parametry jedno- i wielopunktowej charakterystyki dokładności sieci geodezyjnych mają charakter lokalny. Odnoszą się bowiem do pojedynczych punktów lub małych zespołów stanowiących najczęściej fragment sieci. W rozważaniach teoretycznych o charakterze eksperymentalnym najlepiej jest posługiwać się parametrem, który będzie miał charakter globalny, niezależny od orientacji sieci. Charakter taki posiada promień hiperkuli błędów liczony z zależności (39). Z wyznaczeniem tego parametru łączą się pewne problemy, naświetlone w pozycji [31]. Należy zauważyć, że wartości uzyskiwane na podstawie rozwiązania układu równań są obarczone pewnym błędem, wynikającym z tytułu nieprecyzyjnego oszacowania błędów pomiarowych oraz z tytułu obliczeń numerycznych. Błędy te wpływają zarówno na estymowany wektor niewiadomych, jak i na ocenę dokładności wyznaczanych parametrów.

#### 4. Analizy dokładności sieci modelowych proponowanych do stosowania przy zakładaniu geodezyjnych osnów szczegółowych i pomiarowych

##### 4.1. Uwagi wstępne

Analizując realia, jakie w chwili obecnej istnieją w produkcji i powszechnym stosowaniu sprzętu pomiarowo-obliczeniowego przy zakładaniu rozpatrywanych osnów, łatwo zauważyć, że obecnie do wyznaczenia położenia punktów można stosować zarówno metody satelitarne, jak i klasyczne (geodezyjne), głównie metodę poligonową i wcięć geodezyjnych, niezależnie każdą z nich lub łącznie, w zależności od uwarunkowań terenowych. W każdym przypadku zastosowana technologia oraz ustalone dla niej kryteria konstrukcyj-

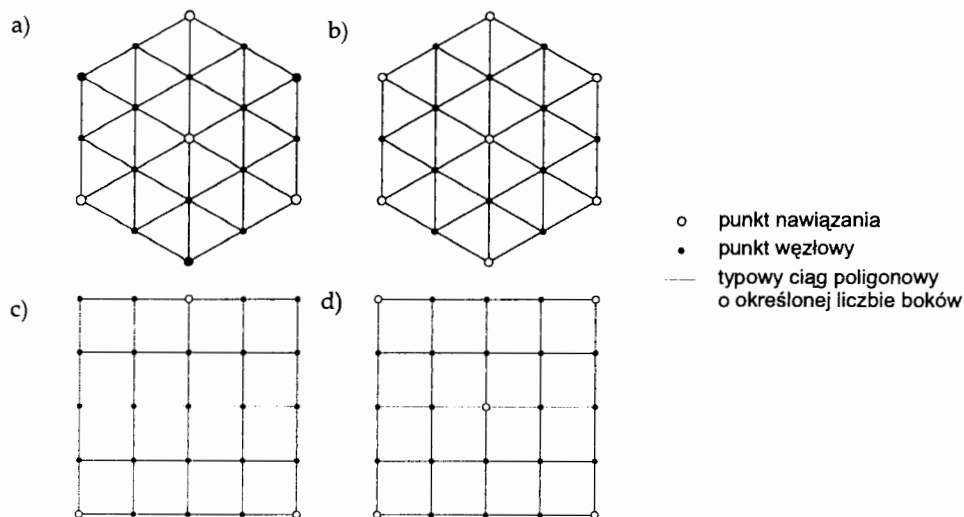
ne i dokładnościowe odnośnie pomiaru powinny zapewnić uzyskanie wymaganej dokładności wyznaczenia położenia punktów osnowy, określonej w podrozdziale 3.3.

O ile możliwości metod satelitarnych nie budzą w tym względzie żadnych zastrzeżeń, to metody klasyczne wymagają uściślenia zasad podanych w obowiązujących w tym zakresie przepisach pomiarowych. Chodzi o ustalenie ścisłej zależności, jaka występuje w tych konstrukcjach (głównie poligonowych) pomiędzy geometrią sieci (ilością punktów stałych i wyznaczanych, długością ciągów i długością tworzących je boków) oraz dokładnością pomiarów elementów sieci a dokładnością wyznaczenia położenia punktów. Problem ten był między innymi przedmiotem badań i analiz prowadzonych w ramach wspomnianego powyżej grantu kierowanego przez autora publikacji w latach 1995–1997, a sposób ich dokonania i uzyskane wyniki przedstawiono w kilku publikacjach z tego zakresu.

#### 4.2. Analizy dokładności sieci modelowych przewidywane do stosowania przy zakładaniu osnowy szczegółowej III klasy

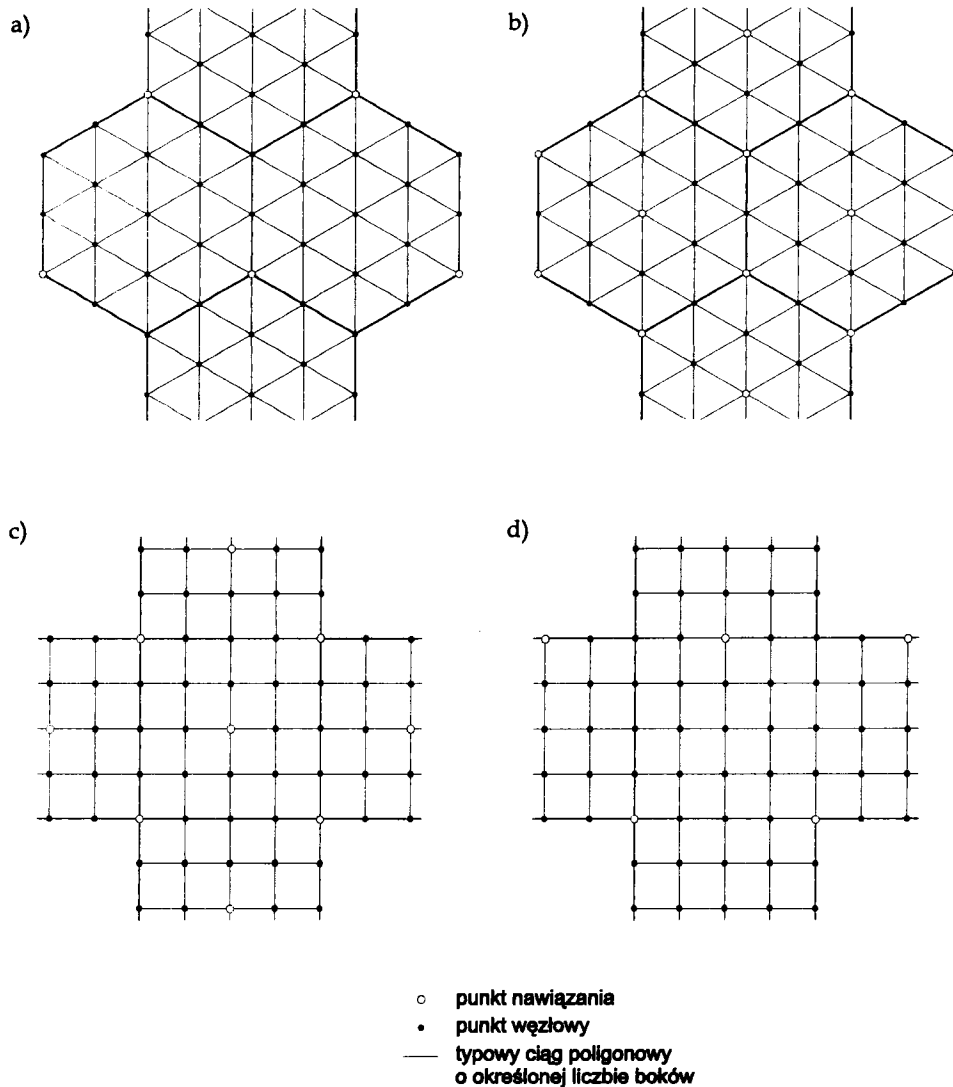
Ze względu na bardzo dużą liczbę punktów występujących w rozpatrywanych sieciach rozwiązywanie postawionego problemu okazało się bardzo trudne. Poszukiwanie wspomnianych powyżej zależności przeprowadzono na drodze wstępnych analiz dokładnościowych 48 wybranych konstrukcji sieci modelowych, o kształcie zbliżonym do kształtu mogącego wystąpić w praktyce na terenie Polski. Analizy te wykonano przy przyjęciu różnych kryteriów dokładności pomiaru ich kątów i długości. Sposób przeprowadzenia tych analiz i uzyskane z nich wyniki przedstawiono szczegółowo w pozycji [29].

Biorąc pod uwagę sytuację istniejącą na terenie Polski w zakresie konstrukcji osnowy I i II klasy przyjęto, że generalnie osnowy szczegółowe można realizować w postaci konstrukcji przedstawionych na rysunkach 6 i 7.



Rys. 6. Szkice analizowanych sieci modelowych  
Objaśnienia w tekście

Pokazane na powyższych rysunkach konstrukcje to klasyczne sieci poligonowe, zbudowane z typowych ciągów poligonowych, o określonej liczbie boków i ustalonej ich długości, o przebiegu dostosowanym do istniejących warunków terenowych, nawiązane do trzech lub siedmiu punktów stałych – jak dla przypadków konstrukcji przedstawionych na rysunkach 6a i b, lub trzech czy pięciu – jak dla konstrukcji przedstawionych na rysunkach 6c i d. Przyjęcie takiej liczebności oraz rozmieszczenia punktów nawiązania w analizowanych sieciach wynika z dużego prawdopodobieństwa takiego ich rozmieszczenia w terenie.



Rys. 7. Szkice rozbudowanych sieci modelowych  
Objaśnienia w tekście

Przedstawione powyżej sieci pozwalają na założenie rozpatrywanych osnow na obszarze o określonej powierzchni, zależnej od wzajemnej odległości punktów nawiązania. W przypadku obszarów przekraczających tę powierzchnię lub mniejszego zagęszczenia terenu punktami nawiązania, konstrukcje te można łączyć ze sobą w sposób przedstawiony schematycznie na rysunkach 7a i b lub 7c i d uzyskując sieci o znacznie większym zasięgu terytorialnym, nawet przy mniejszej liczbie punktów nawiązania.

Każdy z rozpatrywanych typów sieci może mieć dobrane odpowiednio do potrzeb i warunków terenowych parametry geometryczne, przy ustalonym standardzie zagęszczenia terenu punktami nawiązania i założonych dokładnościach pomiaru ich elementów, możliwych do osiągnięcia przy zastosowaniu używanych powszechnie tachimetrów elektronicznych. Dla znalezienia zależności pomiędzy tymi parametrami a dokładnością wyznaczenia położenia punktów przeprowadzono analizy dokładnościowe tych sieci przy następujących uwarunkowaniach:

- punkty sieci będą wyznaczone klasyczną metodą poligonową;
- ciągi tworzące analizowane sieci będą ciągami typowymi zawierającymi kolejno 3, 6 lub 9 boków, o długości 0,1, 0,2, 0,3 i 0,6 km;
- analizowane sieci mogą być jedno- lub dwustrefowe (obwodowe), o punktach rozmieszczonych symetrycznie względem ich geometrycznego środka;
- błąd  $m_d$  pomiaru długości boków w sieciach, niezależnie od ich długości, przyjmowano raz jako  $m_d = \pm 10$  mm, a w następnej wersji jako  $m_d = \pm 5$  mm;
- błąd  $m_\alpha$  pomiaru kątów w sieciach uzależniono od długości boków tworzących ciągi, zgodnie z zależnością  $m_\alpha = \frac{m_d}{d} \rho$ ;
- liczba punktów nawiązania w analizowanych sieciach będzie wynosić trzy - w sieciach przedstawionych na rysunkach 6a i c oraz 7a i d, pięć - w sieciach przedstawionych na rysunkach 6d i c oraz siedem - w sieciach przedstawionych na rysunkach 6b i 7b;
- punkty nawiązania w każdym przypadku przyjęto za bezbłędne.

Dokładność analizowanych sieci scharakteryzowano za pomocą następujących parametrów:

- wartości ekstremalnych błędów średnich współrzędnych  $m_x$ ,  $m_y$  i  $m_p$  wyznaczenia położenia punktów,
- wielkości ekstremalnych półośi  $A$  i  $B$  elips błędów wyznaczanych punktów,
- wielkości promienia średniego  $r$  koła błędów wyznaczanych punktów,
- wielkości promienia  $R$  hiperkuli błędu sieci.

Otrzymane z analiz wartości liczbowe ocenianych parametrów badanych sieci oraz ich lokalizacja w każdej z rozpatrywanych konstrukcji pozwalają postawić następujące wnioski:

- Zastosowanie każdej z analizowanych konstrukcji sieci - z wyjątkiem zbudowanych z ciągów o liczbie boków równej 9 i przy założonym błędzie pomiaru długości równym 10 mm oraz kąta równym odpowiednio 20", 10", 7" i 3" - pozwala na wyznaczenie położenia punktów realizowanej w ich postaci osnowy z błędem nie przekraczającym 5 cm, czyli dwukrotnie mniejszym od wymagań stawianych dla osnow III klasy [29]. W wyłączonych konstrukcjach osiągnięcie wspomnianej dokładności jest możliwe przy zwiększonej dokładności pomiaru kątów i długości boków.

- Przy stałym, możliwym do osiągnięcia błędzie pomiaru długości boków tych sieci dokładność osnów realizowanych w rozpatrywanej postaci w większości przypadków w zasadniczy sposób zależy od błędu pomiaru kątów. Może więc być ona zwiększona przez podniesienie wymaganej dokładności pomiarów kątowych tych sieci.
- W przypadku zakładania osnowy na określonym obszarze, przy ustalonej liczbie i wzajemnej odległości punktów nawiązania, należy dążyć do jej realizacji w postaci konstrukcji zbudowanych z ciągów o małej liczbie możliwie najdłuższych boków.
- Nawet znaczące zwiększenie liczby punktów nawiązania sieci powoduje stosunkowo nieznaczny spadek wartości błędów średnich wyznaczenia położenia ich punktów, zwłaszcza w konstrukcjach zbudowanych z trójkątów.
- Proponowane do oceny dokładności sieci promienie kół błędów i hiperkuli błędów są w pełni przydatnymi i poprawnymi parametrami tej oceny, jeśli będziemy pamiętać o ich definicji i geometrycznej interpretacji.

Rozpatrując standard zagęszczenia terenu punktami osnowy I i II klasy (oraz ich wzajemne odległości) w odniesieniu do wyników uzyskanych z przeprowadzonych analiz można stwierdzić, że na obszarze całej Polski istnieje możliwość realizacji w postaci analizowanych konstrukcji osnów geodezyjnych o błędzie średnim wyznaczenia położenia ich punktów mniejszym od 5 cm, bez potrzeby wcześniejszego zagęszczenia osnowy II klasy. Wniosek powyższy potwierdzają rezultaty uzyskane przy zakładaniu metodą poligonową osnów szczegółowych III klasy na terenie województwa małopolskiego.

#### **4.3. Badania nad ustaleniem metod i kryteriów zakładania poziomych osnów pomiarowych**

Z dokonanych badań i analiz omówionych w rozdziale 3 wynika, że muszą nastąpić określone zmiany zarówno w strukturze, jak i technologii oraz kryteriach dokładnościowych poziomych osnów geodezyjnych lub należy prawnie usankcjonować zmiany już wprowadzone. Są one wymuszane potrzebą prowadzenia w oparciu o punkty tych osnów prac dla wykonywania typowych opracowań geodezyjno-kartograficzno-informatycznych. Z badań tych wynika również potrzeba i konieczność dokonania pewnych zmian dotyczących zarówno technologii, jak i wymagań dokładnościowych pomiarów szczegółów sytuacyjnych, które wymuszane są potrzebami tworzonego systemu informacji o terenie w zakresie jego potrzeb i zadań. Nie bez znaczenia dla potrzeby dokonania tych zmian jest również stosowanie do prowadzenia pomiarów nowoczesnego sprzętu pomiarowego i obliczeniowego.

W związku z przewidywanym powszechnym stosowaniem w pomiarach szczegółowych metody biegunowej z wykorzystaniem tachymetrów elektronicznych, należy ograniczyć ilość rzędów osnowy pomiarowej do dwóch, dostosowując jej kształt, wymiary geometryczne i technologię jej zakładania do tej metody i używanego sprzętu pomiarowego, a dokładność do wymogów i potrzeb SIT.

Osnowy 1. rzędu powinny być rozwiązywane głównie w postaci najprostszyc konstrukcji geodezyjnych, takich jak: pojedyncze punkty lub niewielkie ich grupy, wyznaczone różnego rodzaju wcięciami geodezyjnymi, czy pojedyncze ciągi poligonowe dwustronnie nawiązane lub najwyżej ich układy kilkuwęzłowe. Odległości między punktami tych osnów

powinny być rzędu od około 50 do 300 m, w zależności od warunków terenowych oraz projektowanej technologii pomiarów szczegółowych i rodzaju przewidywanego do stosowania sprzętu pomiarowego.

Punkty osnowy 1. rzędu mogą być wykorzystywane jako:

- stanowiska pomiarowe przy pomiarach szczegółów sytuacyjnych wszystkich grup dokładnościowych,
- punkty nawiązania zakładanych w oparciu o nie osnów pomiarowych 2. rzędu.

Poziomą osnowę pomiarową 2. rzędu mogą tworzyć punkty wyznaczone w sposób analogiczny jak w sieci 1. rzędu i w podobnych konstrukcjach geometrycznych oraz dodatkowo trwale stabilizowane punkty graniczne lub też łatwe do identyfikacji w terenie elementy naziemnych urządzeń infrastruktury podziemnej, wyznaczane w nawiązaniu do punktów wyższych klas lub rzędów. Punkty osnów 2. rzędu mogą być wykorzystywane tylko jako stanowiska pomiarowe lub, przy pomiarach szczegółów metodą domiarów prostokątnych, jako początki i końce linii pomiarowych. Nie mogą być one wykorzystywane jako punkty nawiązania przy zakładaniu nowych osnów pomiarowych.

Problemem zasadniczym jest ustalenie kryteriów konstrukcji tych sieci i pomiaru ich elementów z taką dokładnością, aby zapewnić wyznaczenie położenia ich punktów z odchyleniem standardowym nie przekraczającym 5 cm.

Szczegółowy przebieg dokonanych analiz oraz uzyskane na ich podstawie wyniki przedstawiono w [31, 33 i 34].

Najprostszymi konstrukcjami, które wykorzystuje się dla rozwiązania omawianego zadania, są wcięcia kątowe, liniowe i kątowno-liniowe pojedynczych punktów. Wykonuje się je stosując konstrukcje geodezyjne w postaci i o wymiarach geometrycznych dostosowanych do warunków terenowych oraz rozmieszczenia w terenie punktów nawiązania. W sposób schematyczny konstrukcje te przedstawiono na rysunku 8a i b<sup>5)</sup>.

Przy stosowaniu do pomiaru elementów tych konstrukcji tachymetrów elektronicznych będą to przede wszystkim wcięcia kątowno-liniowe, wykonywane głównie w oparciu o 2 lub 3 punkty osnowy szczegółowej III klasy, położone od siebie w odległości  $D$ , uzależnionej od gęstości punktów tej osnowy, która wahać się będzie od 200 do 1500 m.

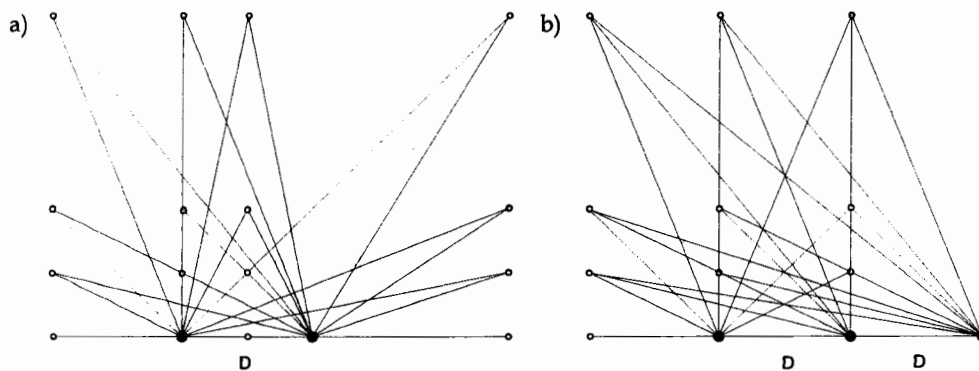
Do analiz teoretycznych przyjęto, że punkty wyznaczone układają się w liniach prostokątnych, przechodzących przez środek odcinka łączącego dwa punkty stałe, oraz odległych od niego o  $0,5, 1,5$  i  $2,0 D$  (rys. 8a) lub w liniach prostokątnych do prostej łączącej trzy punkty stałe, odległych od siebie o  $D$  (rys. 8b).

Bardziej skomplikowanymi konstrukcjami, które mogą być stosowane przy wyznaczeniu położenia punktów rozpatrywanych osnów, są najczęściej: pojedynczy ciąg poligonowy dwustronnie nawiązany, o odpowiedniej liczbie i długości boków, oraz najprostsze układy takich ciągów, przedstawione schematycznie na rysunkach 9a–h<sup>6)</sup>.

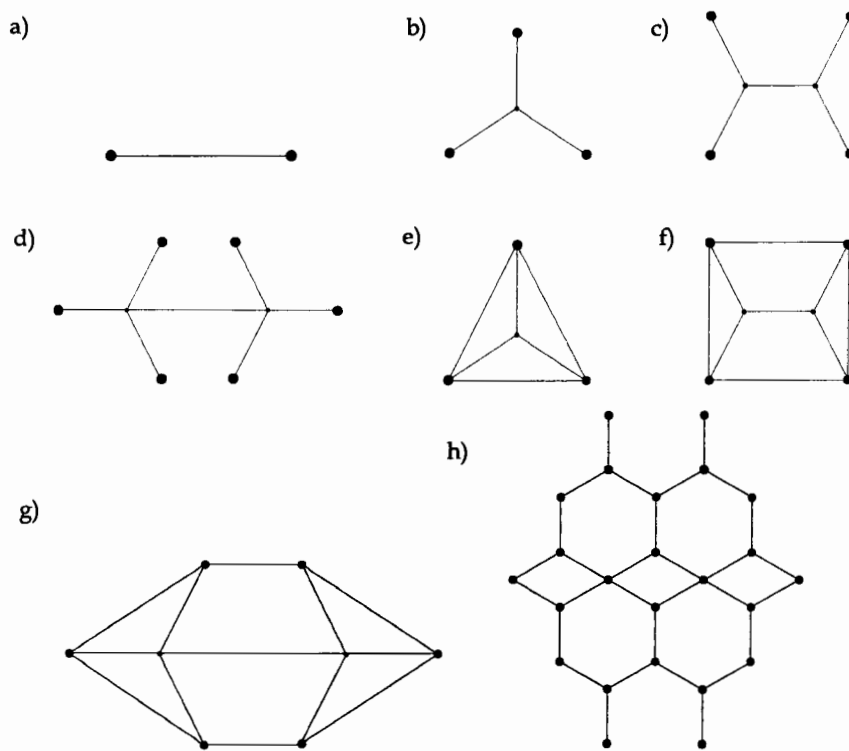
Pokazane na tych rysunkach odcinki, łączące punkty wyznaczone między sobą lub z punktami nawiązania, symbolizują prostoliniowe ciągi o określonej długości boków i ich liczbie w poszczególnych ciągach.

<sup>5)</sup> Konstrukcje takie są typowe dla obiektów o małych powierzchniach (scalenia, podziały i rozgraniczenia pojedynczych lub małych grup działek).

<sup>6)</sup> Konstrukcje takie są typowe dla obiektów o charakterze liniowym, takich jak: drogi, autostrady, rzeki, kanały, szlaki kolejowe itp.



Rys. 8. Modelowe konstrukcje rozpatrywanych wcięć  
Objaśnienia w tekście



OBJAŚNIENIA DLA RYSUNKÓW 8 i 9

- punkt wyznaczony
- punkt niewiązania
- punkt węzłowy
- typowy ciąg poligonowy o określonej liczbie boków

Rys. 9. Proste konstrukcje sieci poligonowych przewidziane do zakładania osnów pomiarowych

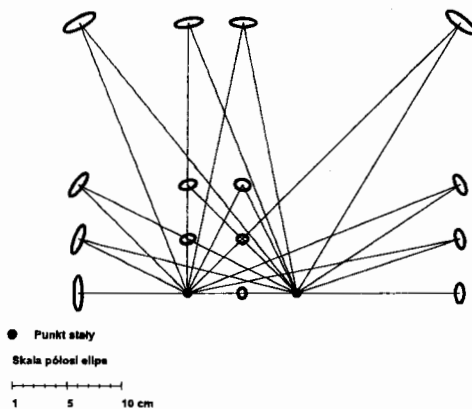


Dokładność wyznaczenia położenia punktów w tych konstrukcjach, przy założonej geometrii możliwej do osiągnięcia w praktyce dokładności pomiarów, scharakteryzowano za pomocą znanych parametrów: błędów średnich, elipsy błędów oraz promienia koła i hiperkuli błędów, których wartości wyznaczono według zależności wyprowadzonych lub przytoczonych w [30]. Ostateczne wartości liczbowe wymienionych powyżej parametrów zestawiono w tabelach, a ich graficzną ilustrację dla kilku wybranych przypadków przedstawiono na rysunkach 10-14.

Wcięcia typu W1/0,1

Długość boku [m]	Odl. punktów nawiązania [m]	Założone błędy pomiaru elementów	
		kąt ["]	odległość [mm]
50-354	100	12-20	5-7

Wyniki analizy dokładności			
Półosie elipsy błędów		Promień koła błędów	
max [cm]	min [cm]	max [cm]	min [cm]
1,6	0,4	0,9	0,4

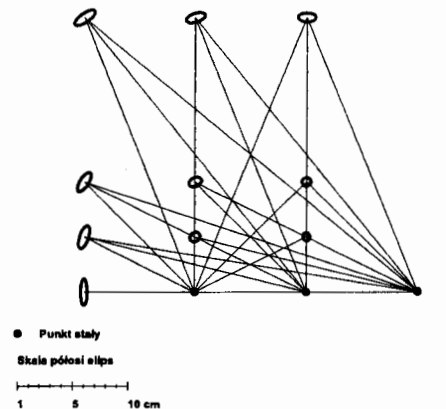


Rys. 10. Graficzna ilustracja analizy dokładności wcięcia wykonanego w oparciu o 2 punkty stałe

Wcięcia typu W2/0,1

Długość boku [m]	Odl. punktów nawiązania [m]	Założone błędy pomiaru elementów	
		kąt ["]	odległość [mm]
50-391	100	12-20	5-7

Wyniki analizy dokładności			
Półosie elipsy błędów		Promień koła błędów	
max [cm]	min [cm]	max [cm]	min [cm]
1,2	0,3	0,67	0,35



Rys. 11. Graficzna ilustracja analizy dokładności wcięcia wykonanego w oparciu o 3 punkty stałe

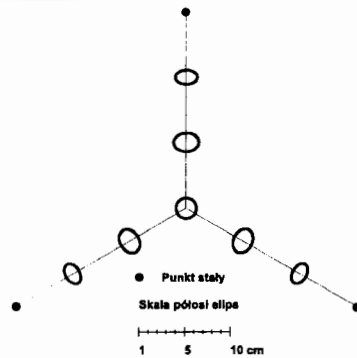
Z dokonanych analiz wynika, że zastosowanie każdej z analizowanych konstrukcji z wyjątkiem niektórych zbudowanych z ciągów o liczbie boków równej 9 pozwala na wyznaczenie położenia punktów osnow realizowanych w tej postaci z błędem nie przekraczającym 5 cm, czyli dwukrotnie mniejszym od wymagań stawianych dla osnow III klasy.

Równocześnie z tymi analizami dokonano próby określenia kryteriów zakładania rozpatrywanych osnow o ustalonej dokładności wyznaczenia położenia ich punktów. Badania przeprowadzono dla wszystkich wymienionych powyżej konstrukcji pomiarowych. Dotyczyły one ustalenia wartości dopuszczalnego błędu pomiaru kątów wierzchołkowych w określonym typie konstrukcji pomiarowej, w zależności od liczby boków i ich długości w poszczególnych ciągach tworzących daną sieć, przy ustalonym błędzie pomiaru tych długości oraz wyznaczenia położenia tych punktów. Procedurę przeprowadzenia tych badań oraz uzyskane na ich podstawie wyniki przedstawiono w [32, 34 i 35].

Sieć typu U1/3/0,1/20/10

Długość boku [km]	Liczba punktów w sieci			Założone błędy pomiaru elementów sieci	
	nawiązania	wyznaczanych	razem	kąt ["]	odległość [mm]
0,1	3	7	10	20	10

Wyniki analizy dokładności				
Półosie elipsy błędów		Promień koła błędów		Promień hiperkuli błędów
max [cm]	min [cm]	max [cm]	min [cm]	[cm]
1,62	0,93	1,40	1,15	0,90

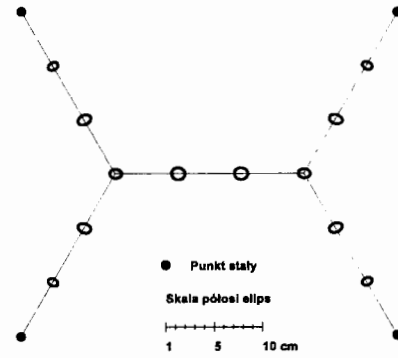


Rys. 12. Graficzna ilustracja analizy dokładności wybranego typu sieci

Sieć typu U2/3/0,1/10/5

Długość boku [km]	Liczba punktów w sieci			Założone błędy pomiaru elementów sieci	
	nawiązania	wyznaczanych	razem	kąt ["]	odległość [mm]
0,1	4	12	16	10	5

Wyniki analizy dokładności				
Półosie elipsy błędów		Promień koła błędów		Promień hiperkuli błędów
max [cm]	min [cm]	max [cm]	min [cm]	[cm]
0,91	0,47	0,82	0,59	0,45

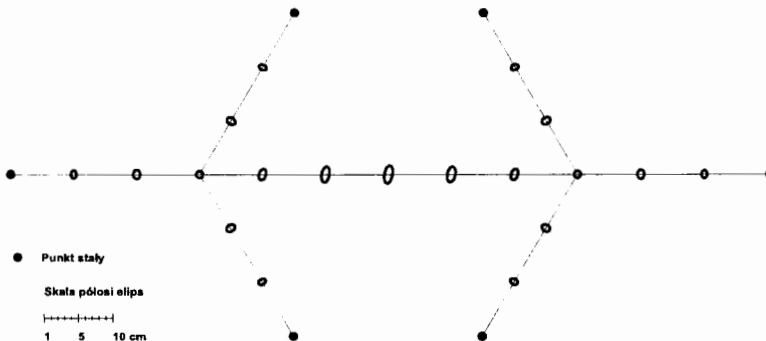


Rys. 13. Graficzna ilustracja analizy dokładności wybranego typu sieci

Sieć typu U3/3/0,1/10/5

Długość boku [km]	Liczba punktów w sieci			Założone błędy pomiaru elementów sieci	
	nawiązania	wyznaczanych	razem	kąt ["]	odległość [mm]
0,1	6	19	25	10	5

Wyniki analizy dokładności				
Półosie elipsy błędów		Promień koła błędów		Promień hiperkuli błędów
max [cm]	min [cm]	max [cm]	min [cm]	[cm]
1,57	0,46	1,07	0,57	0,45



Rys. 14. Graficzna ilustracja analizy dokładności wybranego typu sieci

Osiągnięcie wymaganej w praktyce dokładności wyznaczenia położenia punktów granicznych uzależnione jest zawsze zarówno od wyznaczenia, z adekwatną do tego celu dokładnością, położenia punktów geodezyjnej osnowy poziomej, stanowiących bazę ich pomiaru, zdefiniowaną kowariancją  $\text{Cov}(X_{\text{osn}})$ , jak i dokładnością pomiaru elementów wyznaczających położenie tych punktów, charakteryzowaną za pomocą kowariancji  $\text{Cov}(L)$ . Zależność tę można umownie zapisać w formie wzoru

$$\text{Cov}(X_{\text{osn}}) + \text{Cov}(L) \leq \text{Cov}(X_{\text{gr}}) \quad (41)$$

gdzie  $\text{Cov}(X_{\text{gr}})$  oznacza kowariancję wyznaczenia położenia punktów granicznych. Najczęściej w praktyce położenie punktów granicznych wyznacza się z konstrukcji jednoznacznych, w oparciu o punkty poziomej osnowy pomiarowej. W takim przypadku  $\text{Cov}(X_{\text{gr}})$  dla współrzędnych punktów granicznych określimy w prosty sposób, zgodnie z prawem przenoszenia się kowariancji. Jeśli przyjmiemy, że kowariancje elementów wyznaczających punkty graniczne są równe 0 oraz że współrzędne punktów osnowy pomiarowej i elementy wyznaczające punkty graniczne są niezależne, czyli

$$\text{Cov}(X_{\text{osn}}, L) = \text{Cov} \begin{pmatrix} X_{\text{osn}} \\ L \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cov}(X_{\text{osn}}) & 0 \\ 0 & \text{Cov}(L) \end{bmatrix} \quad (42)$$

to, zgodnie z prawem przenoszenia się kowariancji, macierz kowariancji  $\text{Cov}(X_{\text{gr}})$  dla współrzędnych punktów granicznych wyznaczymy z zależności

$$\text{Cov}(X_{\text{gr}}) = F^T \text{Cov}(X_{\text{osn}}, L) F \quad (43)$$

gdzie  $F$  jest macierzą utworzoną z pochodnych cząstkowych funkcji wyznaczających punkty graniczne.

Jeżeli przy wyznaczeniu punktów granicznych występować będą obserwacje nadliczbowe, wówczas model matematyczny w części stochastycznej będzie analogiczny do przedstawionego powyżej, natomiast część funkcjonalna wyrażona będzie przez równania poprawek typu

$$\varepsilon = A\hat{x} + L \quad (44)$$

Macierz kowariancji  $\text{Cov}(X_{\text{gr}})$  będzie w tym przypadku wyrażona zależnością

$$\text{Cov}(X_{\text{gr}}) = \sigma^2 (A^T \text{Cov}(X_{\text{osn}}, L)^{-1} A)^{-1} \quad (45)$$

gdzie:

- $A$  - macierz współczynników układu równań obserwacyjnych,
- $\sigma^2$  - wariancja resztowa.

Dla określonej macierzy kowariancji punktów granicznych  $\text{Cov}(X_{\text{gr}})$  i przy ustalonej macierzy kowariancji  $\text{Cov}(L)$  dla typowych konstrukcji pomiarowych należałoby wyznaczyć „maksymalną” wartość macierzy kowariancji  $\text{Cov}(X_{\text{osn}})$  osnowy pomiarowej, mając na uwadze konieczność spełnienia warunku (41).

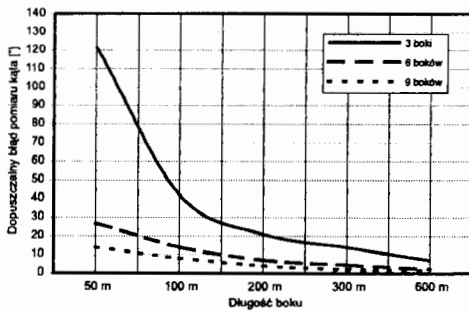
W dotychczasowej praktyce geodezyjnej zakłada się najczęściej bezbłądność punktów nawiązania, czyli w rozważanym zagadnieniu – bezbłądność punktów osnowy pomiarowej. Na podstawie przeprowadzonych analiz typowych konstrukcji stosowanych do pomiaru szczegółów sytuacyjnych oceniamy, że w takim przypadku położenie punktów granicznych można wyznaczyć z dokładnością nie mniejszą niż  $\pm 3$  cm. Przy założeniu równości wariancji  $V_x$  i  $V_y$  maksymalna wariancja dla współrzędnej punktu granicznego nie przekracza wartości rzędu  $5 \text{ cm}^2$ , co zapiszemy

$$V(X_{pkt}) \leq 5 \quad (46)$$

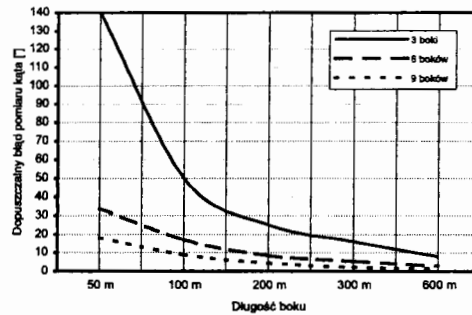
Przyjmując, że błąd położenia punktów granicznych nie powinien przekroczyć wartości  $\pm 5$  cm, możemy przy założeniu jak powyżej napisać

$$V(X_{pkt})_{\max} \leq 12,5 \quad (47)$$

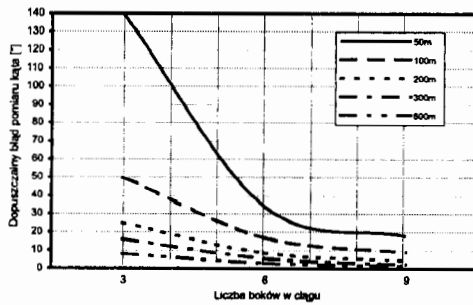
Na podstawie zależności (46) możemy oszacować z dużym prawdopodobieństwem, że dla spełnienia warunku (47) maksymalna wariancja punktów osnowy pomiarowej nie może przekroczyć wartości rzędu  $7 \div 8 \text{ cm}^2$ .



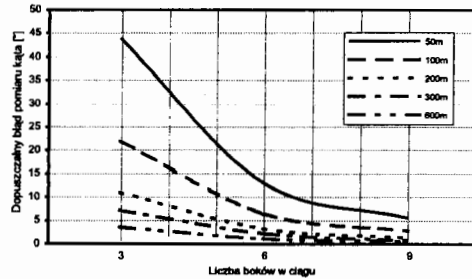
Rys. 15. Zależność błędu pomiaru kątów od długości boków przy stałej ich liczbie, w ciągach typu U0



Rys. 16. Zależność błędu pomiaru kątów od długości boków przy stałej ich liczbie, w sieciach typu U2



Rys. 17. Zależność błędu pomiaru kątów od liczby boków o stałej długości, w sieciach typu U1



Rys. 18. Zależność błędu pomiaru kątów od liczby boków o stałej długości, w sieciach typu U3

Reasumując, dla zapewnienia punktom granicznym dokładności rzędu  $\pm 5$  cm, przy założeniu dokładności pomiaru elementów wyznaczających punkty graniczne zapewniającej zrealizowanie warunku (46), punkty osnowy pomiarowej nie mogą być obciążone błędem położenia większym niż rzędu  $3\pm 4$  cm.

## 5. Poszukiwania optymalnego znaku i sposobu utrwalania punktów rozpatrywanych osnów

Proponowane znaczne zmniejszenie liczby punktów rozpatrywanych osnów wymaga zapewnienia im większej trwałości w przestrzeni i czasie.

Zagadnieniu temu poświęcone były prace nad optymalnymi konstrukcjami znaków geodezyjnych oraz sposobem ich utrwalania zapewniającym im większą trwałość, które przedstawiono w [27].

Z przeprowadzonych dociekań wynikało, że punkty rozpatrywane w terenie najlepiej lokalizować tak, aby istniejące naturalne warunki terenowe same chroniły je przed zniszczeniem.

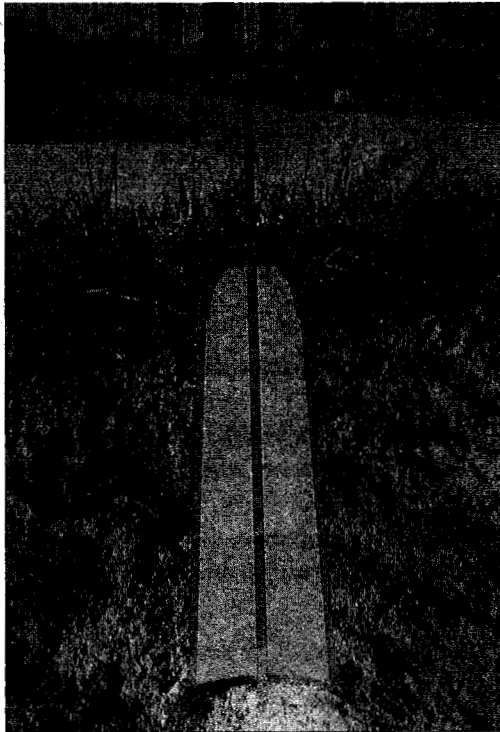
Rozpatrzono przy tym dwa przypadki sytuacji terenowych, w jakich punkty te mogą być lokalizowane, a mianowicie:

- 1) tereny rolnicze i pozarolnicze, niezainwestowane,
- 2) tereny zainwestowane, o różnym stopniu natężenia tego zainwestowania.

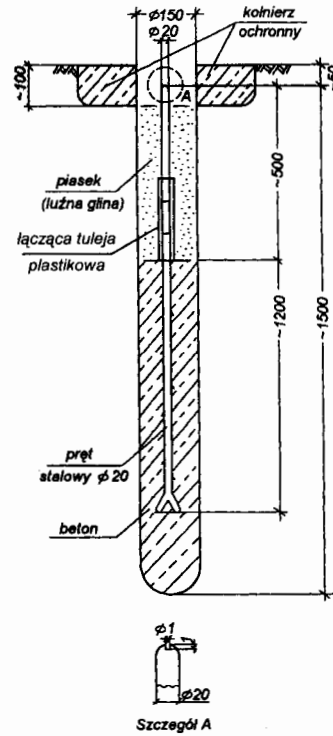
W wyniku dokonanych analiz ustalono, że najlepszym rozwiązaniem rozpatrywanego problemu na terenach wymienionych jako pierwsze jest stabilizacja tych punktów typowym znakiem betonowym typu 42b. Dla ograniczenia niedogodności, jakie stwarza dość znaczny jego ciężar, występujących szczególnie w terenach trudno dostępnych (górskie, podmokłe czy trudno przejezdne), proponuje się utrwalać je znakami plastikowymi firmy Vektor (rys. 19) lub o konstrukcji opracowanej przez S. Latosia, przedstawionej na rysunku 20.

Wykluczono jako nie spełniające swego zadania i oczekiwań stosowanie do tego celu znaków plastikowych pomysłu prof. Hermanowskiego. Dla ochrony tych znaków przed zniszczeniem należy lokalizować je na terenach nieużytków lub wyłączonych z uprawy czy dokonywanych zabiegów agrotechnicznych (miedze, drogi polne, brzegi rowów, pobocza szlaków komunikacyjnych), mając przy tym na uwadze w ostatnim przypadku możliwość dokonywania ich konserwacji (odsnieżanie, koszenie traw i chwastów) oraz modernizację (zmianę geometrii i nawierzchni jezdni, zmianę ukształtowania poboczy). Dobrym zabezpieczeniem znaków przed ich zniszczeniem jest również ich lokalizacja w bezpośrednim sąsiedztwie istniejących w terenie trwałych elementów uzbrojenia terenu (słupów, przepustów, studzienek lub innych budowli inżynierskich) oraz różnego rodzaju budynków.

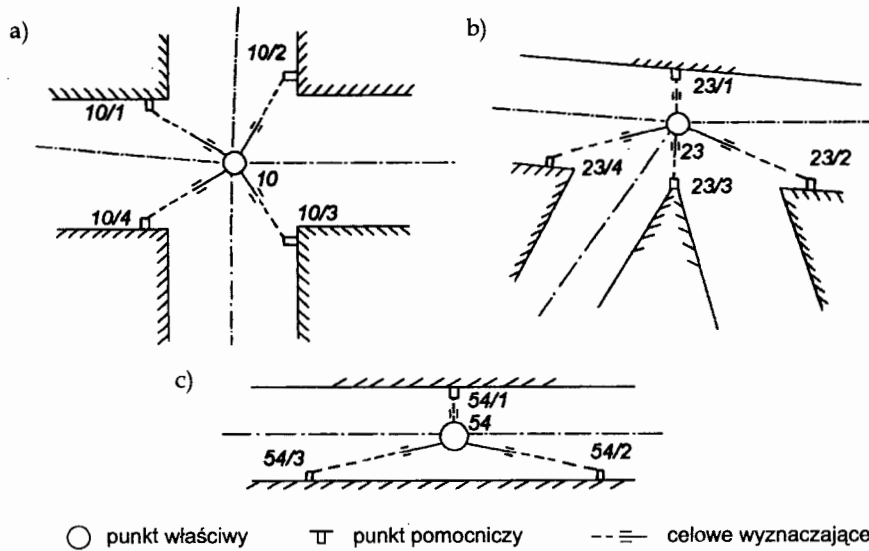
W przypadku drugim stwierdzono, że najlepszym sposobem zapewnienia trwałości rozpatrywanych punktów jest utrwalenie ich wieloznakowo, za pomocą znaków ściennych, o ich konfiguracjach przedstawionych przykładowo na rysunku 21a, b i c.



Rys. 19. Znak do stabilizacji ziemnej punktów firmy Vektor



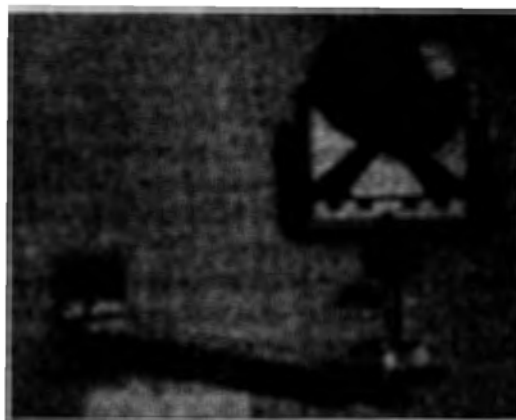
Rys. 20. Proponowany znak do stabilizacji ziemnej



Rys. 21. Przykładowe rozmieszczenie znaków przy utrwalaniu punktów wieloznakowo

W wybranych miejscach, oznaczonych schematycznie na załączonych rysunkach, na ścianach budynków lub innych obiektów inżynierskich (słupy, betonowe ogrodzenia, elementy mostów czy przepustów itp.) mogą być założone uchwyty (zaczepy) stanowiące miejsce zamocowania specjalnych konstrukcji mechanicznych czy uchwytów dla zamocowania konstrukcji stanowiącej podstawę do urządzenia w odpowiednim ich miejscu stanowiska pomiarowego, funkcjonującego w sposób samodzielny. W praktyce znana jest i często stosowana taka konstrukcja pod nazwą „ścienny znak geodezyjny” [10]. Częściej jednak w miejscach tych, na wyżej wymienionych obiektach, lepiej jest zastabilizować na stałe odpowiedniej konstrukcji trzpień metalowe, utrwalające w sposób pośredni właściwy punkt osnowy, sygnalizowany w sposób tymczasowy (najczęściej małej średnicy rurka czy trzpień metalowy z nawierconym otworkiem), zastabilizowany w utwardzonej nawierzchni (krawężniki chodników, jezdnie asfaltowe, nawiercone obudowy różnego rodzaju komór, włazów, zasuw itp.). W literaturze fachowej znaki te nazywa się często półpoligonami.

W zakresie rozpatrywanej problematyki autor opracowania ma również swój udział. Jego dziełem jest opracowanie oryginalnego sposobu utrwalania punktów ściennych, łącznie z konstrukcją mechaniczną dostosowanych do niego wysięgników (ramion), pokazanych na rysunku 22. Z jego inicjatywy na większości terenów województwa małopolskiego do utrwalenia punktów ściennych (pośrednich) stosowano powszechnie śruby używane do mocowania szyn kolejowych do podkładów.



Rys. 22. Prototyp wysięgnika i znaku ściennego

## 6. Niekonwencjonalne metody zakładania rozpatrywanych osnów

Pod koniec ubiegłego stulecia, kiedy w wyniku dokonanych, opisanych powyżej prac zagadnienie zakładania poziomych geodezyjnych osnów szczegółowych można było uważać za ostatecznie rozwiązane od strony technicznej, pojawił się nowy problem w tym zakresie. Tym razem nie był to jednak problem natury technicznej, ale finansowej i wynikał z przejęcia tego zadania przez starostów powiatowych jako zadanie własne, finansowane głównie ze skromnego budżetu poszczególnych powiatów. Okazało się bowiem, że starostów wielu powiatów nie stać na rozwiązywanie tych osnów w dotychczasowy, kła-

syczny sposób, jako sieci powierzchniowych, zgodnie z obowiązującymi w tym zakresie przepisami [14] i [15], ze względu na mały budżet.

Jak w wielu przypadkach w życiu, tak i tym razem sytuacje zaistniałe na terenach niektórych powiatów stworzyły możliwość rozwiązania rozpatrywanego problemu w inny, niekonwencjonalny sposób, tańszy i szybszy. Trzeba było tylko w umiejętny sposób ją wykorzystać. Sytuację taką stworzył burzliwy rozwój w ostatnich latach budownictwa obiektów sakralnych oraz masztów przekaźnikowych telefonii komórkowej i telewizji czy wreszcie istnienie innych obiektów wysokich, takich jak: kominy, iglice, wieże obserwacyjne czy nawet wysokie słupy linii energetycznych. Wybrane, łatwe do jednoznacznej identyfikacji elementy tych budowli mogą pełnić rolę rozpatrywanej osnowy, o ile tylko wyznaczone zostaną współrzędne wybranych elementów tych osnów z wymaganą dokładnością.

Wspomniane punkty tak realizowanej osnowy istnieją już w terenie (nie trzeba ich stabilizować i zabudowywać) i są dobrze widoczne z różnych miejsc. Ich położenie z wymaganą dokładnością można wyznaczyć wielokrotnym wcięciem w przód z istniejących w terenie punktów osnowy I i II klasy lub wyznaczonych specjalnie w tym celu metodą satelitarną czy też z jednych i drugich. Punkty osnowy I i II klasy mogą powiększyć liczbę wspomnianych punktów wysokich, jeśli zostaną one trwale zabudowane (często wymaga to tylko naprawy istniejącego na nich sygnału betonowego). Znaczna ilość punktów wyznaczonych satelitarnie, jeśli zostanie poprawnie i w sposób celowy zlokalizowana, po ich zabudowie trwałym sygnałem może również powiększyć liczbę punktów tak zakładanej osnowy. W efekcie końcowym łączna liczba punktów tych osnów, istniejących na pewnej wysokości ponad powierzchnią terenu, utworzyć może dość sporą sieć, którą można wykorzystać do zakładania osnowy pomiarowej metodą kąтового wcięcia wstecz pojedynczych punktów lub ich niewielkich grup. Prócz tego mogą być one wykorzystywane jako punkty nawiązania kąтового pomiarów prowadzonych z istniejących punktów dawnych zdezaktualizowanych sieci. Jeśli takich punktów brak, to przy okazji realizacji sieci punktów wysokich należy metodą satelitarną w ustalonych miejscach założyć dodatkowo grupy od 3 do 4 punktów połączonych ze sobą możliwymi do osiągnięcia wizurami.

Opisaną w przedstawnym powyżej sposób osnowę zrealizowano na terenie powiatu brzeskiego i łańcuckiego [38] i [39]. Kończy się jej realizacja w udoskonalonej wersji na terenie powiatu tarnowskiego i gorlickiego. Takim rozwiązaniem osnowy zainteresowani są geodeci powiatowi powiatu bocheńskiego, nowosądeckiego i innych.

W zakończeniu podkreślić należy, że założone w przedstawionym powyżej sposób osnowy charakteryzują się błędem wyznaczenia położenia ich punktów poniżej 0,10 m. Według opinii ich użytkowników spełniają one pokładane w nich nadzieje, ułatwiając prowadzenie pomiarów i zapewniając im wymaganą dokładność.

## 7. Zakończenie

Już dziś, a tym bardziej w najbliższej przyszłości, trudno wyobrazić sobie właściwe kierowanie i zarządzanie jednostkami państwowymi i samorządowymi bez sprawnie funkcjonującego systemu informacji o terenie. Podstawą zaś tworzenia i funkcjonowania tego systemu była, jest i będzie zawsze osnowa geodezyjna, zakładana i funkcjonująca na prze-



strzeni dziesiątków lat w różnej postaci, w zależności od poziomu technicznego stosowanego sprzętu pomiarowego i komputerowego na danym etapie rozwoju gospodarczego państwa. Nie bez znaczenia był przy tym zawsze aspekt finansowy realizacji omawianych osnów i prowadzonych w oparciu o nie pomiarów szczegółowych, dostarczających informacji do bazy danych systemu informacji o terenie. Aspekt ten wystąpił szczególnie ostro w ostatnich latach rozwoju Polski w związku z jej przejściem na gospodarkę rynkową.

Z dokonanych badań i analiz wynika, że w chwili obecnej rozpatrywane osnowy na wymaganym poziomie dokładnościowym mogą być realizowane zarówno w sposób klasyczny, na podstawie bezpośrednich pomiarów geodezyjnych lub techniką satelitarną, w całości niezależnie każdą z nich na określonych obszarach kraju lub obecnie coraz częściej przemiennie, jako sieci zintegrowane. W każdym przypadku dla zapewnienia im wymaganej dokładności przy ich zakładaniu należy zachować ustalone kryteria odnośnie ich konstrukcji geometrycznej i dokładności pomiaru wyznaczających je elementów.

Ustalona dla tych osnów ich systematyka i kryteria dokładnościowe, aczkolwiek poprawne, budzą w tej chwili pewne zastrzeżenia. Wydaje się, że aktualny sprzęt i technologie zakładania rozpatrywanych osnów stwarzają możliwość podniesienia ustalonych dla nich dokładności, szczególnie w zakresie osnów szczegółowych i pomiarowych, czy nawet likwidacji dwóch klas wymienionych jako pierwsze.

Już dziś, a tym bardziej w bliskiej przyszłości, nastąpić może w ogóle zmiana dotychczasowego poglądu na rolę, zadania oraz sposób zakładania i funkcjonowania rozpatrywanych osnów. Coraz częściej mówi się o możliwości odejścia od obowiązującego obecnie sposobu funkcjonowania rozpatrywanych osnów i zastąpienia ich systemem stacji permanentnych i aktywnych sieci GPS. Wydaje się jednak, że do czasu ich utworzenia, uruchomienia i powszechnego stosowania na obszarze całej Polski w naszych warunkach gospodarczych upłynie jeszcze wiele lat. Tymczasem dla potrzeb rozwoju gospodarczego państwa, dla aktualizacji bazy danych funkcjonującego systemu informacji o terenie niezbędne jest zakładanie i funkcjonowanie rozpatrywanych osnów w dotychczasowy sposób klasyczny lub zmodyfikowany, oparty najczęściej na pomiarach satelitarnych i bezpośrednich pomiarach geodezyjnych.

Rezultaty dokonywanych w ostatnim okresie badań, analiz i eksperymentów w dziedzinie osnów geodezyjnych wskazują, że już dziś, a tym bardziej w przyszłości, można zakładać rozpatrywane osnowy w sposób tradycyjny lub uruchomić systemy przejmujące ich zadania, na wymaganym poziomie dokładności, w każdych warunkach terenowych. Ich wybór i stosowanie w Polsce uzależnione są tylko od istniejących uwarunkowań finansowych.

## Literatura

- [1] Baran W.: *O potrzebie i możliwościach utworzenia krajowej trójwymiarowej sieci geodezyjnej*. Materiały VII Sesji Nauk-Tech. nt. „Aktualne problemy naukowe i techniczne prac geodezyjnych”, Korbielów, październik 1991
- [2] Baran W., Oszczak S.: *Geodezyjny, wielofunkcyjny system stacji permanentnych GPS w Polsce*. Materiały z III Konferencji nt. „Ośrodki Dokumentacji Geodezyjnej i Kartograficznej jako Centrum SIT, Elbląg, kwiecień 2000

- [3] Baryła R., Ciećko A., Oszczak S.: *Ocena szczegółowych osnów geodezyjnych założonych w latach 1955-1991 na terenie m. Pruszcz Gdański, pod kątem modernizacji ewidencji grun- tów*. Materiały konferencyjne z X Sesji Naukowo-Technicznej nt. „Aktualne Problemy Naukowe i Techniczne Prac Geodezyjnych”, Piwniczna 2001
- [4] Beluch J.: *Szczegółowe sytuacyjno-wysokościowe osnowy geodezyjne wyznaczane w przestrzennym układzie umownym*. Kraków 1981(praca habilitacyjna niepublikowana)
- [5] Beluch J.: *Accurency aspect of the densiftcation of geodetic network by means of free stations*. Geodezja iKartografia, t.XLVIII, z.1-2, Warszawa 1999
- [6] Bujakowski K, Latoś S., Stachura J.: *Ocena stanu aktualnego poziomej osnowy geodezyjnej oraz koncepcje dalszego jej rozwoju na terenie byłego województwa krakowskiego*. Przegląd Geodezyjny, nr 1, 2000
- [7] Czaja J.: *Nowa propozycja oceny mocy konstrukcji geodezyjnych*. Prace Komisji Górniczo-Geodezyjnej PAN, Oddział w Krakowie, z. Geodezja, nr 28, Kraków 1980
- [8] Czaja J.: *Modele statystyczne w informacji o terenie*. Kraków, Wyd. AGH 1996
- [9] Czarniecki K., Śledziński J.: *Współczesne poglądy na rozwój i przyszłość podstawowych sieci geodezyjnych*. Przegląd Geodezyjny, nr 4,1984
- [10] Dąbrowski W., Waniec A.: *Ścienny znak geodezyjny*. Przegląd Geodezyjny, nr 12, 1979
- [11] Gaździcki J.: *Analiza dokładności poziomych osnów geodezyjnych*. Warszawa, Prace IGiK, z. 3 (54), 1976
- [12] Grafarend E.: *Schiitzung von Varianz und Kowarianz der Beobachtungen in geoditischen Ausgleichungsmodellen*. Karlsruhe, Allgemeine Vermessung-Nachrichten 1978
- [13] Instrukcja B-III. Warszawa 1968
- [14] Instrukcja techniczna G-1. Warszawa 1978
- [15] Instrukcja techniczna G-1. Warszawa 1986
- [16] Instrukcja techniczna G-2. Warszawa 2001
- [17] Instrukcja techniczna G-4. Warszawa 1981
- [18] Instrukcja techniczna G-4. Warszawa 2002
- [19] Instrukcja techniczna 0-1. Warszawa 1969
- [20] Instrukcja techniczna 0-1. Warszawa 1978
- [21] Instrukcja techniczna 0-1/0-2. Warszawa 2001
- [22] Latoś S.: *Sur les possibilites de l'application des telemetres electromagnetiques de petite portee pour l'etablissement des reseaux geodesiques de grande etendue*. Varsovie, Academie Polona- ise des Sciences 1967
- [23] Latoś S.: *Stan aktualny oraz proponowana koncepcja zmian struktury i technologii rozwiązywania szczegółowych osnów geodezyjnych poziomych w Polsce*. Przegląd Geodezyjny, nr 8, 1976
- [24] Latoś S.: *Badania modelowe niektórych typów szczegółowych osnów geodezyjnych poziomych*. Przegląd Geodezyjny, nr 1, 1977
- [25] Latoś S.: *Projekt poziomej szczegółowej osnowy geodezyjnej m. Krakowa*. Przegląd Geodezyjny, nr 10, 1977
- [26] Latoś S.: *Geodezyjne osnowy poziome - stan obecny, kierunki i tendencje rozwoju oraz nowe koncepcje rozwiązań*. ZN AGH Geodezja, z. 63, 1981

- [27] Latoś S., Maślanka J.: *Kierunki i tendencje w rozwiązywaniu problemu utrwalania punktów osnow geodezyjnych*. ZN AGH Geodezja, t. 1, 1995
- [28] Latoś S., Maślanka J.: *Kierunki i tendencje prac nad modernizacją poziomych osnow geodezyjnych i wykonywania pomiaru szczegółów w aspekcie systemów informacji o terenie*. VIII Sesja Naukowo-Techniczna pt. „Aktualne problemy naukowe i techniczne prac geodezyjnych” Olsztyn 1995
- [29] Latoś S., Maślanka J., Preweda E.: *Analiza dokładności poziomych osnow geodezyjnych zakładanych metodą poligonową z wykorzystaniem tachimetrów elektronicznych*. Rocznik AGH Geodezja, t. 3, 1997
- [30] Latoś S.: *Propozycja nowej charakterystyki dokładności sieci geodezyjnych*. ZN AGH Geodezja, t. 3, 1997
- [31] Latoś S., Preweda E.: *Geometryczna interpretacja i własności jednopunktowej oraz globalnej charakterystyki dokładności poziomych sieci geodezyjnych*. ZN AR Wrocław, Geodezja i Urządzenia Rolne, XIV, nr 324, Wrocław, 1997
- [32] Latoś S., Preweda E.: *Badania nad ustaleniem metod i kryteriów zakładania geodezyjnych, poziomych osnow pomiarowych*. AGH, Geodezja, t. 4, z. 1, 1998
- [33] Latoś S.: *Ocena faktycznej dokładności oraz efektów ekonomicznych poziomej osnowy geodezyjnej III klasy, zakładanej metodą poligonową na obszarach zagospodarowanych*. Półrocznik AGH Geodezja, t. 5, z. 1, 1999
- [34] Latoś S., Preweda E.: *Ustalenie kryteriów dokładnościowych wyznaczania położenia punktów poziomej osnowy pomiarowej przy wykorzystaniu tachimetrów elektronicznych*. AGH, Geodezja, t. 5, z. 1, 1999
- [35] Latoś S., Preweda E.: *Kryteria zakładania poziomych osnow pomiarowych w dobie powszechnego stosowania tachimetrów elektronicznych*. Biuletyn Naukowy, nr 6, 1999, Olsztyn (Acta Academiae Agriculturae ac Technicae Olstenensis)
- [36] Latoś S.: *Koncepcja rozwiązania poziomej geodezyjnej osnowy szczegółowej III klasy na terenie byłego województwa tarnowskiego*. Przegląd Geodezyjny, nr 8, 1999
- [37] Latoś S.: *O potrzebie i kierunkach zmian niektórych przepisów w zakresie poziomych osnow geodezyjnych i szczegółowych pomiarów sytuacyjnych*. Przegląd Geodezyjny, nr 3, 2000
- [38] Latoś S.: *Czy warto mierzyć tak wysoko*. Geodeta. Magazyn geoinformatyczny, nr 11(78), Warszawa 2001
- [39] Latoś S., Mąkowski K.: *Możliwości i efekty zagęszczania punktów osnow geodezyjnych po- przez włączenie do nich punktów na obiektach wysokich*. ZN AR Wrocław, Geodezja i Urządzenia Rolne XX, nr 452, 2002
- [40] Radzio W.: *Zostało 7 lat*. Geodeta. Magazyn geoinformatyczny, nr 3(94), Warszawa 2003
- [41] Rao. C. R.: *Modele liniowe statystyki matematycznej*. Warszawa, PWN 1982
- [42] Szeliga K., Bojar Z., Pachelski W., Uchański J.: *Raport o stanie geodezji i kartografii w Polsce*. Warszawa 1994 (praca niepublikowana)
- [43] Włodarczyk R.: *Nowa triangulacja polska*. Geodezja i Kartografia, t. VIII, z. 1-2, Warszawa 1959